

## Algebrou proti koronaviru X

(cvičení **cihlovou barvou** jsme udělali na cvičení, a tak je můžete vynechat)

### Normální podgrupy a faktorizace

1. Pro grupu  $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$  ukažte, že její centrum, tj. množina  $Z(G) = \{a \in G; (\forall g \in G) a \cdot g = g \cdot a\}$ , tvoří normální podgrupu.
2. Rozhodněte, zda množina  $\{\pi \in \mathbf{S}_4; \pi^3 = \text{id}\}$  tvoří normální podgrupu grupy  $\mathbf{S}_4$ . [Ne.]

Připomeňme, že pro grupu  $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$  a její normální podgrupu  $H$  značíme  $G/H = \{gH; g \in G\}$  množinu všech levých (a současně pravých) rozkladových tříd grupy  $G$  podle  $H$  (jiné značení  $[g] := gH$ ). Na této množině přirozeným způsobem definujeme strukturu grupy — vizte poznámky z přednášky —, které říkáme faktorgrupa grupy  $G$  podle podgrupy  $H$ . Pro počítání ve faktorgrupě jsou důležité hlavně dva vztahy:

- a)  $gH = fH \iff f^{-1}gH = H \iff f^{-1}g \in H$  (kde  $H = 1H$  je ovšem neutrální prvek faktorgrupy  $G/H$ );
- b) pokud  $gH \neq fH$ , pak  $gH \cap fH = \emptyset$ .

Pokud by grupa  $G$  byla psána aditivně, prvky faktorgrupy  $G/H$  bychom značili typicky  $g + H$  místo  $gH$ . Dále pak zřejmě  $g + H = f + H \iff g - f \in H$ . Není-li grupová operace v cvičeních níže explicitně zmíněna, je zamýšlena ta jediná smysluplná: např.  $\mathbb{Q}$  je aditivní grupa,  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  zase multiplikativní apod.

3. Rozmyslete si, jak se počítá v grupě  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . [pěkně]

4. Ukažte, že pro každé prvočíslo  $p$  a přirozené číslo  $k$  existuje v grupě  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  prvek řádu  $p^k$ . Existuje jich víc? [existuje jich  $\varphi(p^k)$ , totiž  $\left[\frac{a}{p^k}\right]$ , kde  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < a < p^k$  a  $p \nmid a$ ]

5. V grupě  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  popište prvky konečného řádu a ukažte, že  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  je izomorfní podgrupě grupy  $\mathbb{C}^*$  sestávající z prvků normy 1.

6. Které známé grupě je izomorfní daná faktorgrupa?

- (a)  $\mathbf{D}_{12}/Z(\mathbf{D}_{12})$  [S<sub>3</sub>]
- (b)  $\mathbf{S}_4/\mathbf{K}_4$ , kde  $\mathbf{K}_4$  je Kleinova 4prvková podgrupa (viz např. dole na str. 87)? [S<sub>3</sub>]
- (c)  $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+$ , kde  $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}^*; r > 0\}$  (Může se hodit 1. věta o izomorfismu.) [Z<sub>2</sub>]
- (d)  $\mathbb{C}^*/\mathbf{S}^1$ , kde  $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^*; \|z\| = 1\}$ . (Taky se může hodit 1. věta o izomorfismu.) [R<sup>+</sup>]

### Akce (neboli působení) grupy na množině

7. (a) Určete grupu rotací pravidelného čtyřstěnu (tip: označte si stěny čísly 1–4 a přemýšlejte, které permutace z  $\mathbf{S}_4$  můžete realizovat otáčením čtyřstěnu). [A<sub>4</sub>]

- (b) Pro každé  $n \in \mathbb{N}$  určete, kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu  $n$  barvami (až na otovávání čtyřstěnu). Předpokládáme, že  $\alpha$ ) každou stěnu barvíme celistvě právě jednou barvou (tedy žádné puntíky či proužky),  $\beta$ ) různé stěny mohou mít totožné barvy a  $\gamma$ ) není nutné použít barvy všechny.  $\left[\frac{n^4+11n^2}{12}\right]$

8. Anička chce pro každého ze svých 506 facebookových přátel vytvořit podobný (ale ne stejný) odznáček, rozhodne se proto pro následující návrh: rozdělí kruh na 12 stejných výsečí a každou výseč obarví. Kolik minimálně barev musí použít, aby splnila, co si předsevzala, předpokládáme-li, že dva odznáčky jsou různé, nelze-li jeden získat z druhého pootočením? [alespoň 3]

9. Uvažujme působení grupy  $\mathbf{A}_5$  na množinu  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$ , kteréžto působení je definováno vztahem

$$\pi(k, l, m) = (\pi(k), \pi(l), \pi(m)) \text{ pro každé } \pi \in \mathbf{A}_5.$$

Určete počet orbit tohoto působení a nějakou množinu reprezentantů těchto orbit.

[5 orbit]

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc.

- 10.\* Buď  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Rozhodněte, zda je grupa všech regulárních horních trojúhelníkových matic  $n \times n$  nad tělesem  $\mathbb{Q}$  s jedničkami na diagonále normální podgrupou a) grupy  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$ , b) grupy všech regulárních horních trojúhelníkových matic nad  $\mathbb{Q}$ . [a) ne; b) ano]
- 11.\* Připomeňme, že pro grupu  $G$  se izomorfismus z  $G$  na  $G$  nazývá *automorfismus grupy  $G$* . Množina všech automorfismů grupy  $G$  se značí  $\text{Aut}(G)$ .
- (a) Buď  $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$  grupa a  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  zobrazení definované vztahem  $\varphi(g)(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$ . Ověřte, že se jedná o korektně definovaný homomorfismus grup  $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$  a  $(\text{Aut}(G), \circ, {}^{-1}, \text{id}_G)$ . Popište jeho jádro a zjistěte, zda  $\text{Inn}(G) := \text{Im}(\varphi)$  tvoří normální podgrupu v  $(\text{Aut}(G), \circ, {}^{-1}, \text{id}_G)$ .  
[ $\text{Ker}(\varphi) = \mathbf{Z}(G)$ ,  $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ ]
- (b) Předpokládejme, že zadaná grupa  $G$  je konečná. Ukažte, že  $\text{Inn}(G) \cong G$  právě tehdy, když  $\mathbf{Z}(G)$  je triviální podgrupa.
- 12.\* Ukažte, že je-li  $G$  grupa a  $G/\mathbf{Z}(G)$  je cyklická, pak je  $G$  komutativní.
- 13.\*\* Dokažte, že kdykoliv má (libovolná) grupa  $G$  lineárně uspořádané podgrupy, pak  $G \cong \mathbb{Z}_{p^k}$  pro nějaké  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  a prvočíslo  $p$ .
- 14.\* Na rozdíl od grupy  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , kterou si lze představit třeba tak, že stočíte reálnou přímku do kružnice o obvodu 1 a počítáte tam s reálnými čísly modulo 1, je to s grupou  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  o poznání méně názorné. Uvědomte si například, že na  $\mathbb{R}$  lze pohlížet jako na vektorový prostor nad  $\mathbb{Q}$ . Lze tak psát  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \oplus D$  pro nějaký vektorový podprostor  $D$  prostoru  $\mathbb{R}$ .
- (a) Dokažte, že (aditivní) grupy  $D$  a  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  jsou izomorfní.
- (b) Ukažte, že existuje bijekce (nikoliv izomorfismus)  $\beta : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  a pevně nějakou zvolte. Uvažujte reálnou funkci  $f = \beta \circ \pi$ , kde  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  je přirozená projekce na faktorgrupu, tj.  $\pi(r) = r + \mathbb{Q}$ . Zvolte si dvě oblíbená reálná čísla  $a, b$ , kde  $a < b$ , a ukažte čemu se rovná  $\{f(x); a < x < b\}$ . *Takový typický příklad darbouxovské funkce, že? A teď ještě zkuste  $f$  (lebesgueovskiy) změřit!* [R]
- 15.\* Dokažte, že má-li grupa  $G$  normální podgrupy  $A, B$  takové, že  $AB = G$  a  $A \cap B = \{1\}$ , pak je  $G \cong G/A \times G/B$ .
- 16.\* Uvažujte krychli jakožto neorientovaný graf s 8 vrcholy a 12 hranami. Nechť  $G$  značí grupu všech automorfismů tohoto grafu. Dokažte, že  $G \cong \mathbf{S}_4 \times \mathbf{S}_2$ . (Předchozí úloha a nějaká ta akce grupy na množině vám může pomoci.)
- 17.\* Kolik různých náhrdelníků lze sestavit ze šesti černých a tří žlutých korálek, použijeme-li vždy všech devět? (Předpokládáme, že máme k dispozici potřebné propriety jako šňůrku apod.) [7]
- 18.\* Uvažujte grupu  $\mathbf{D}_{12}$  jakožto podgrupu grupy  $\mathbf{S}_6$  generovanou „rotací“  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$  a „zrcadlením“  $(2\ 6)(3\ 5)$ .
- (a) Popište přirozené působení grupy  $\mathbf{D}_{12}$  na množině  $X = \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$  a také na množině  $Y = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ .
- (b) Užijte (a) k důkazu, že  $\mathbf{D}_{12} \cong \mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_2$ .