Schéma martingalových diferencí $\{X_{n,j}\}$ $n = 1, 2, \ldots$
$j = 1, 2, \ldots r_n$

$$W_t^n = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j} \qquad r_n(t) = k \qquad \frac{k}{n}$$

$$r_n(t) = \lfloor r_n \cdot t \rfloor \qquad t \in [0,1]$$

$W^n = (W_t^n, t \in [0,1])$ zprava spojité procesy

$$W^n \xrightarrow{d} W = (W_t, t \in [0,1])$$

$\downarrow$

potřebujeme ověřit konvergenci konečně-rozměrných rozdělení + těsnost rozdělení W^n
(Cramér - Wold)

__Věta__ (základní princip invariance pro schéma martingalových diferencí)

Buď $\{X_{n,j}\}$ s m. d. takové, že pro $t \in [0,1]$

(1) $E\left[\max\limits_{1 \le j \le r_n} X_{n,j}^2\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (zanedbatelnost)

(2) $\sum\limits_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j}^2 \xrightarrow{P} t$

Potom $W^n = (W_t^n, t \in [0,1]) \xrightarrow{\mathcal{D}} W$, kde W je Wienerův proces na $[0,1]$

__Důkaz:__ Pomocí McLeishovy věty a Cramér-Woldovy ukážeme konvergenci kon-rozm rozdělení k normálnímu s odpovídající variační maticí

Pro posloupnost rozdělení na $(D[0,1], d_D)$

P_n je těsné, pokud

$$\forall \varepsilon>0 \quad \lim_{\delta\to 0} \; \limsup_{n\to\infty} P\Big[\sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ t,s\in[0,1]}} |W^n_t - W^n_s| > \varepsilon\Big] = 0$$

(P_n je rozdělení W^n)

$$E \max_{1\le j\le r_n} X_{n,j}^2 \to 0 \qquad\qquad \sup_{n\ge n_0} E \max_j X_{n,j}^2 < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n\ge n_0 \quad E \max X_{n,j}^2 < \varepsilon$$

$$\max_{1\le j\le r_n} |X_{n,j}| \xrightarrow{P} 0 \qquad\qquad P\big[\max |X_{n,j}| > \varepsilon\big] \le \frac{E\max X_{n,j}^2}{\varepsilon^2} \to 0$$

$$\tilde{X}_{n,j} = X_{n,j} \cdot \mathbb{1}\left[\sum_{l=1}^{j-1} X_{n,l}^2 \le 2\right] \qquad j = 1, \dots, r_n$$

$$\tilde{W}_1^n = \sum_{j=1}^{r_n(1)} \tilde{X}_{nj}$$

$$P[\tilde{X}_{n,j} \neq X_{n,j} \text{ pro nějaké } j = 1, \dots, r_n] \to 0 \quad \left(\text{protože } P\left[\sum X_{n,j}^2 > 2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$$

Cramérova-Woldova

$k \in \mathbb{N} \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \qquad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \le 1$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \left(\tilde{W}_{t_i}^n - \tilde{W}_{t_{i-1}}^n\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{k} a_i \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)$$

W Wienerův proces

Tento tvar volíme proto, že $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ $i = 1, \dots, k$ jsou nezávislé $N(0, t_i - t_{i-1})$

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{M}} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{W}^n_{t_i} = \sum_{j=1}^{r_n(t_i)} \tilde{X}_{n,j} \qquad \tilde{W}^n_{t_i} - \tilde{W}^n_{t_{i-1}} = \sum_{j=r_n(t_{i-1})+1}^{r_n(t_i)} \tilde{X}_{n,j}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=r_n(t_{i-1})+1}^{r_n(t_i)} \tilde{X}_{n,j} = \sum_{j=1}^{r_n(t_k)} Y_{n,j} \qquad Y_{n,j} = a_i \tilde{X}_{n,j}$$

$\downarrow$

podle indexu j

$Y_{n,j}$ tvoří stále s.m.d.

$Y_{n,j}$ také splňuje předpoklady McLeishovy věty

$$\sum_{j=1}^{n_m(t_k)} Y_{m,j}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 (t_i - t_{i-1})$$

$$\sum_{j=1}^{n_m(t)} \tilde{X}_{m,j}^2 \xrightarrow{P} t \qquad \forall t$$

$$\sum_{j=1}^{n_m(t_1)} a_1^2 \tilde{X}_{m,j} \xrightarrow{P} a_1^2 t_1$$

$$\sum_{j=1}^{n_m(t_2)} Y_{m,j}^2 = \sum_{j=1}^{n_m(t_1)} a_1^2 \tilde{X}_{m,j}^2 + \sum_{j=1}^{n_m(t_2)} a_2^2 \tilde{X}_{m,j}^2 - \sum_{j=1}^{n_m(t_1)} a_2^2 \tilde{X}_{m,j}$$

$$\downarrow P$$

$$a_1^2 t_1 + a_2^2 t_2 - a_2^2 t_1 =$$

2 McLeish tétel $\quad \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n_m(t_k)} Y_{m,j} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$$\left(\tilde{W}^n_{t_1}, \tilde{W}^n_{t_2}-\tilde{W}^n_{t_1}, \ldots, \tilde{W}^n_{t_k}-\tilde{W}^n_{t_{k-1}}\right)^T \xrightarrow{d} N_k\left(\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}, \Sigma\right)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2-t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & t_k-t_{k-1} \end{pmatrix}$$