$C$ křivka   $\mathbb{P}$ – množina míst   $\mathbb{P}^{(1)}$ místa stupně 1

$\mathrm{Div}(C) = \mathrm{Div}(K(C)/\mathbb{L})$ volná ab. grupa nad $\mathbb{P}$

Chceme   $\mathbb{P}^{(1)} \rightleftarrows K$-rac. body

Pro $P$ afinní bod   $u \in K[C]$   $u$ reg. polynom

je $v_P(u) > 0 \iff u(P) = 0$   $u$ prochází $P$

obecně $v_P(u) \geq 0$   velikost $u(P)$ odpovídá shodě o hladkosti mezi $C$ a $V_u$

$\mathrm{ord}_{C_P}(u)$

Pro $A = \sum a_P P \in \mathrm{Div}(C)$ $\quad \deg(A) = \sum a_P \deg(P)$

pro $K = \overline{K}$ $\quad \mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}$

$$\mathrm{Pic}(K(C)) = \mathrm{Pic}(C) = \deg^{-1}(0) / \mathrm{Princ}(K(C))$$

grupa hlavních divizorů

Pro $u \in K(C)$ je $\underbrace{\mathrm{div}(u)}_{\text{hlavní div. } u} = \sum v_P(u) P$

$\mathrm{Pic}(C) \cong C(K)$

pokud $C$ el. křivka

$\deg(\mathrm{div}(u)) = 0$

$\mathrm{div}(u_1 u_2) = \mathrm{div}(u_1) + \mathrm{div}(u_2)$

$\mathrm{div}(u_1 / u_2) = \mathrm{div}(u_1) - \mathrm{div}(u_2)$

$C$ je dále hladká WK $y^2 = x^3 + ax + b$ $\infty$ někdy $\mathcal{O}$

$v_{\mathcal{O}}(y) = -3$ $v_{\mathcal{O}}(x) = -2$ $z = x/y$ | $v_P(z) = 1$

$v_{\mathcal{O}}(z) = v_{\mathcal{O}}(x) - v_{\mathcal{O}}(y) = -2 - (-3) = 1$

$u \longrightarrow \mathrm{div}(u)$ JEDNOZNAČNĚ

$\not\exists$ libovolný divizor $\xrightarrow{?}$ $u$, $\mathrm{div}(u) = F$

určený jednoznačně až na $\lambda$-násobek

Platí $\mathrm{div}(u) = \mathrm{div}(v) \iff \exists \lambda \in K^*$, že $v = \lambda u$

Cíl F libovolný divizor. Najít nejobecnější vyjádření ($\mathcal{O}$, ~~z~~)

kterým z možných divizorů $u$ takových, že $\mathrm{div}(u) = F$ vybere právě jeden

$K(C)$ umí prvky reprezentovat $\frac{a}{b} \in K(x_1, x_2)$

Abych mohl rozšířit chování zobrazení $C \longrightarrow \overline{K}$ daná $K(C)$ na $C \to \mathbb{P}^1(\overline{K})$, tak potřebuji „homogenizovat" $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{A(x_1,x_2,x_3)\, x_3^i}{B(x_1,x_2,x_3)\, x_3^j}$$

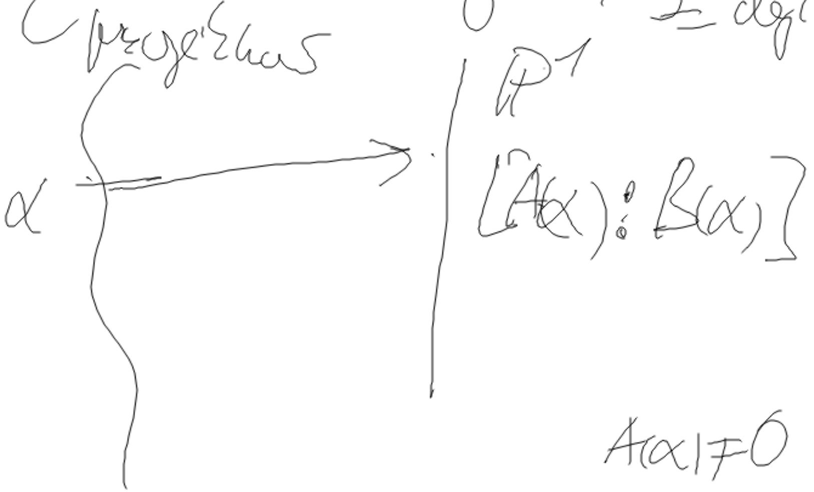
$\deg(A) = \deg(a)$

$\deg(B) = \deg(b)$

volím $i, j$ tak, aby $\deg(a) + i = \deg(b) + j$

Potom tedy prvky $K(C)$ reprezentovaného $[A:B]$, a to dovolí

$A, B$ hom. $\deg(A) = \deg(B)$

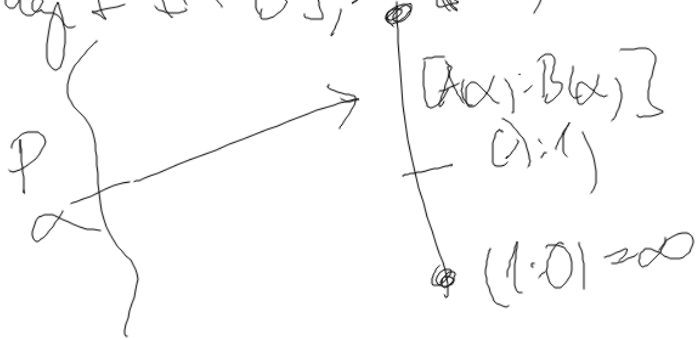



Pokud $C$ hladká, umím volit pro každou $\alpha$ reprezentaci $[A:B]$, že

$A(\alpha) \neq 0$ nebo $B(\alpha) \neq 0$

Výhoda proj. repr.

ke každému $\alpha \in C$ existuje $[A:B]$, že $(0:1)=0$




$\sigma \in K(C)$

$[A:B]$ jako repr. $\sigma$

~~$P=(\alpha,\beta)$~~

$$\sigma(P)=\begin{cases}(0:1)=0 & v_P(\sigma)\geq 1\\ (\lambda:1),\ \lambda\in\mathbb{C}^* & v_P(\sigma)=0\\ (1:0)=\infty & v_P(\sigma)<0\end{cases}$$

Nemusíme se vrátit do pojetí, kdy $\{ \xrightarrow{\sigma} \mathbb{A}^1 \subseteq K$

a zjistit fakt, že $\sigma(P)=(1:0)$ tedy, že řešení $\sigma$ není v $P$ definováno

$u \in K(C)$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{div}(u) = F$

Mějme $u \in K(C)$ $\qquad$ $C$ je WK

$v_\sigma(u) = k \in \mathbb{Z} \implies v_\sigma(u/z^k) = v_\sigma(u) - k v_\sigma(z) = 0$

To znamená, že $(u/z^k)(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{NE} \\ \lambda \in K^* \\ \infty & \text{NE} \end{cases}$

Proto $\exists$ jediné $\gamma \in K^*$, že $\left(\dfrac{\gamma u}{z^k}\right)(\sigma) = 1$

(obecně rovnice $\gamma$)

Proto existuje pro daný hlavní divisor $F$ jediné $u$ takové, že $\operatorname{div}(u) = F$ a současně $\left(\dfrac{u}{z^{v_\sigma(u)}}\right)(\sigma) = 1$

hodnota závisí jen na $F$

ZNAČÍ SE

$u = f_F$ $\qquad$ $F = \sum a_\sigma \sigma$ $\quad a_\sigma = v_\sigma(u)$

Pokažimo $u, v \in K(C)$

normalizirani, tad

$u \cdot v$ i $u/v$ jesu takođe normalizirani

$$\left(\frac{u}{2^{v_0(u)}}\right)(0) = 1$$

$$D: \Bigg(\underbrace{\frac{u}{2^{v_0(u)}} \cdot \frac{v}{2^{v_0(v)}}}_{2^{v_0(u)+v_0(v)}}\Bigg)(0) = 1 \cdot 1 = 1 = \frac{uv}{2^{v_0(uv)}}$$

vrijedi

$$v_0(uv) = v_0(u) + v_0(v)$$

$$1 = u^{-1}\, 2^{-v_0(u^{-1})}$$

$$v_0(u^{-1}) = -v_0(u)$$

Jak vypadá vztah mezi sčítáním v $\mathrm{Pic}(C)$ a sčítáním na křivce

$\oplus$ $\quad [n]P \quad\quad + \quad nP \quad\quad [n][P]$ ← divisor, ve kterém se $P$ vyskytuje s násobností $n$

---

$$[P]+[Q] = [P\oplus Q]+[O]$$

$$[D] = D + \mathrm{Prin}(C)$$

$$[P+Q-(P\oplus Q)-O] = 0$$

$$P+Q-P\oplus Q-O \in \mathrm{Prin}(C)$$

tento hlavní divisor potřebujeme explicitně vyjádřit

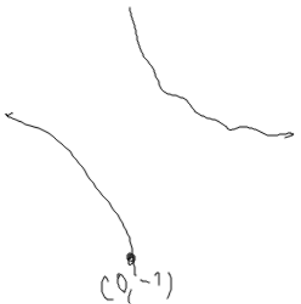
$$P = \ominus Q \quad \text{tak } P\oplus Q = O$$

$P=\alpha,\beta$

$$P+\ominus P-2O = (x-\alpha)$$

$$(x-x_P)$$

je $(x-\alpha)$ normalizovaný divisor



Pokračujeme ověřením, že

$$\frac{(x-\alpha)}{z^k}(O) = 1$$

$$k = v_O(x-\alpha) = -2$$

$$z = x/y$$

$$\frac{(x-\alpha)x^2}{y^2} = \frac{y^2 - (\alpha+a)x^2 - b}{y^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{Y^2 - (\alpha+a)X^2 - bZ^2}{Y^2}$$

$(O)$

$$Y$$

$$[Y^2 - (\alpha+a)X^2 - bZ^2 : Y^2](0:1:0) = (1:1) = 1$$

$v_O(x) = -2$

Potřebujeme ověřit že

$$\frac{(x-\alpha)}{z^k}(O) = 1$$

$$k = v_O(x-\alpha) = -2$$

$$z = x/y$$

$$\frac{(x-\alpha)x^2}{y^2} = \frac{y^2-(\alpha+a)x^2-b}{y^2}$$

$b(O)$

$Y$

$$\downarrow$$

$$\frac{Y^2-(\alpha+a)X^2-bZ^2}{Y^2}$$

$$[Y^2-(\alpha+a)X^2-bZ^2 : Y^2](0:1:0) = (1:1) = 1$$

$$v_p(a) < v_p(b) \Rightarrow v_p(a+b) = v_p(a)$$