22-1

$y' = A\cdot y + b$ $\quad L(y) = y' - Ay = 0$ ... $\operatorname{Ker} L$ .. dim n

všechna řešení $\quad y_0 + \operatorname{Ker} L$ $\quad$ FSŘ

$$y^{(n)} + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1\cdot y' + a_0\cdot y = 0$$

$a_i \in \mathbb{R}$: char polynom

$$\lambda^n + a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1} + \dots + a_1\cdot\lambda + a_0 = 0$$

Věta T8.7 Mějme zadány $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristického polynomu násobnosti $s_1, \dots, s_k$ (tedy $s_1 + \dots + s_k = n$).

Pak ~~$y^{(n)} + \dots + a_1$~~ funkce

$$\underline{e^{\lambda_1 x}}, x\cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1-1}\cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, \underline{e^{\lambda_k x}}, \dots, x^{s_k-1}\cdot e^{\lambda_k x}$$

tvoří FSŘ.

$$y^{(n)} + \dots + a_1\cdot y' + \dots + a_0 y = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}$$

Dk.: 1. λ kořen char polynom $\Rightarrow$ $e^{\lambda x}$ je řešení

2. $\lambda = 0$ je s-násobný kořen $\Rightarrow$ $1, x, \dots, x^{s-1}$ jsou řešení

1. $L(y) = y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, $Q(\lambda)$ char. polynom

$L(e^{\lambda x})$ $\qquad (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \qquad (e^{\lambda x})'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad \dots$

$$L(e^{\lambda x}) = \lambda^n e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = e^{\lambda x} Q(\lambda) \qquad (*)$$

3. Nechť λ_0 je s-násobný kořen $Q(\lambda)=0$. Chceme $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda_0 x}$ patří do FSŘ

Napišme řešení ve tvaru $y(x) = a(x) e^{\lambda_0 x}$.

Pak $y'(x) = a'(x) e^{\lambda_0 x} + a(x) \lambda_0 e^{\lambda_0 x}$, $y''(x) = a''(x) e^{\lambda_0 x} + a'(x) \lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \dots$

Obecně $L(y) = L(a e^{\lambda_0 x}) \overset{\boxed{}}{=} e^{\lambda_0 x} M(a)$, kde M je lineární diferenciální operátor řádu n s konstantními koeficienty, tedy

$$M(a) = b_n a^{(n)} + b_{n-1} a^{(n-1)} + \dots + b_1 a' + b_0 a, \quad b_j \in \mathbb{R}.$$

Označme Q_1 charakteristický polynom $M(a)$.

Z bodu 1 víme (*): $L(e^{\tilde\lambda x}) = e^{\tilde\lambda x} Q(\tilde\lambda)$ a analogicky $M(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} Q_1(\lambda)$

Nyní trochu magie:

$$Q_1(\lambda) = \frac{M(e^{\lambda x})}{e^{\lambda x}} \overset{\boxed{}}{=} \frac{L(e^{\lambda x} e^{\lambda_0 x})}{e^{\lambda_0 x} e^{\lambda x}} = \frac{L(e^{(\lambda+\lambda_0) x})}{e^{(\lambda+\lambda_0) x}} = Q(\lambda+\lambda_0)$$

Víme $Q(\lambda)$ má λ_0 jako s-násobný kořen $\Rightarrow$ $Q_1(\lambda)$ má 0 jako s-násobný kořen

Podle 2. kroku $1, x, \dots, x^{s-1}$ patří do FSŘ $M(a)=0$

Z $y = a e^{\lambda_0 x}$ plyne$_{\boxed{}}$, že $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda_0 x}$ patří do FSŘ $L(y)=0$

4, krok Funkce $e^{\lambda_j x}, \dots, x^{s_j - 1} \cdot e^{\lambda_j x}$ jsou LNZ:

Nechť pro spor $\exists$ polynomy $P_1, \dots, P_k$ ($st\, P_j \le s_j - 1$)

tak, že $\sum_{j=1}^{k} P_j(x) \cdot e^{\lambda_j x} = 0 = P_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x} + \dots + P_k(x) \cdot e^{\lambda_k x}$ $\quad / \cdot e^{-\lambda_k x}$

BÚNO $P_j \not\equiv 0$

$0 = P_1(x) \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot x} + P_2(x) \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_k) \cdot x} + \dots + P_k(x)$ $\quad$ / tolikrát s_k x derivuji

($\triangle$: $P(x)$, $st\, P = s$, $\lambda \neq 0$: $(P(x) \cdot e^{\lambda x})' = R(x) \cdot e^{\lambda x}$, kde $st\, R = st\, P$.

$(x^s \cdot e^{\lambda x})' = s \cdot x^{s-1} \cdot e^{\lambda x} + x^s \cdot e^{\lambda x} \cdot \lambda$)

$0 = R_1(x) \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot x} + \dots + R_{k-1}(x) \cdot e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot x}$ $\quad / \cdot e^{-(\lambda_{k-1} - \lambda_k) x}$

zmizí R_{k-1} $\Longleftarrow$ $+ s_{k-1} x$ derivuji

$st\, R_i = st\, P_i$

Tohle provedu $(k-1)x$ zbude $S(x) \cdot e^{\tilde{\lambda} \cdot x} \equiv 0$, kde $st\, S = st\, P_1$

$\Rightarrow S \equiv 0 \Rightarrow$ spor s $P_1 \not\equiv 0$ $\quad \square$

Věta T8.8 (o speciální pravé straně pro rovnici n-tého řádu - BD) 22-4

~~Ať~~ Mějme zadány $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, nechť $P_m(x)$ je polynom m-tého řádu a $(\alpha + i\beta)$ je k-násobný kořen charakteristického polynomu (lze i $k=0$, $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$). Pak rovnice

$$y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \quad \left(\text{popřípadě } P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x\right)$$

má na $\mathbb{R}$ řešení ve tvaru

$$y_0(x) = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + x^k \cdot R_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,$$

kde Q_m a R_m ~~je~~ jsou polynomy stupně m.

Poznámka: Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \cdot y_i(x),$$

kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice

$$y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

RADA: „Věta" má přednost.

Příklady: 1. $y'' - y = e^x + e^{2x}$

a) $y'' - y = 0$ $\lambda^2 - 1 = 0$ $\lambda = \pm 1$

$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$ na $\mathbb{R}$

b) $\left.\begin{array}{l} y_1'' - y_1 = e^x \\ y_2'' - y_2 = e^{2x} \end{array}\right\} y_0 = y_1 + y_2$ $y_0'' - y_0 = y_1'' + y_2'' - y_1 - y_2 = e^x + e^{2x}$

y_2: $P_m \equiv 1$, $m = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\alpha + i\beta = 2$ je $k = 0$ násobný kořen

<u>Věta:</u> $y_2 = x^0 \cdot a \cdot e^{2x} \cdot \cos 0 + \cancel{x^0 \cdot b \cdot e^{2x} \cdot \sin 0} = a \cdot e^{2x}$

$y_2' = 2a e^{2x}$, $y_2'' = 4a e^{2x}$ $y_2'' - y_2 = 4a e^{2x} - a \cdot e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow y_2(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{2x}$

<u>y_1:</u> $P_m = 1$, $m = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\alpha + i\beta$ je $k = 1$ násobný kořen

podle věty $y_1 = x^1 \cdot a \cdot e^x \cdot 1$, $y_1' = a e^x + x \cdot a \cdot e^x$,

$y_1'' = a \cdot e^x + a \cdot e^x + x a e^x$, $y_1'' - y_1 = 2a e^x \cancel{+ x a e^x} \cancel{- x a e^x} = e^x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$y_1 = \frac{1}{2} x e^x$ Celkem $\underbrace{\frac{1}{2} x e^x + \frac{1}{3} e^{2x}}_{y_1 + y_2} + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$ je řešení na $\mathbb{R}$ pro $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$ 22-6

a) $y'' + 3y' + 2 = 0$ $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$

$C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}$ na $\mathbb{R}$ pro $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) variace konstant. Budeme hledat řešení

$y_0(x) = C_1(x) \cdot e^{-x} + C_2(x) \cdot e^{-2x}$

$y_0' = \underline{C_1' \cdot e^{-x}} + C_1 \cdot (-e^{-x}) + \underline{C_2' \cdot e^{-2x}} + C_2 \cdot (-2 \cdot e^{-2x}) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$

$\boxed{\text{TRIK}}$! $C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot e^{-2x} = 0$

$y_0'' = -C_1' \cdot e^{-x} + C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2' \cdot e^{-2x} + 4C_2 e^{-2x}$

$y_0'' + 3y_0' + 2y_0 = -C_1' \cdot e^{-x} + \cancel{C_1 \cdot e^{-x}} - 2C_2' e^{-2x} + \cancel{4C_2 e^{-2x}}$

$\cancel{-3 \cdot C_1 e^{-x}} \cancel{-6 \cdot C_2 e^{-2x}} + \cancel{2C_1 e^{-x}} + \cancel{2C_2 e^{-2x}} = \frac{1}{e^x+1}$

$-C_1' \cdot e^{-x} - 2C_2' \cdot e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1}$

TRIK: $C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot e^{-2x} = 0$

VYŘEŠ: $C_1' = \frac{e^x}{e^x+1}$, $C_2' = \frac{-e^{2x}}{e^x+1}$ INTEGRUJ $\Rightarrow$

$C_1 = \log(e^x+1)$ $C_2 = -e^{-x} + \log(e^x+1)$

$y(x) = \underbrace{\log(e^x+1) \cdot e^{-x} + (-e^{-x} + \log(e^x+1)) \cdot e^{-2x}}_{\{y_e = C_1(x)\, e^{-x} + C_2(x) \cdot e^{-2x}\}} + C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}$ na $\mathbb{R}$

pro $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$