• (1) $y^{(n)} + \dots + a_1(x)\cdot y' + a_0(x)\cdot y = b(x)$

• (2) $y' = A(x)\cdot y + b(x)$ $\qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Pozn: Z (1) lze udělat (2) $\qquad u = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ $\qquad u(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y^0$ $\qquad y(x_0) = y_0,\ \dots,\ y^{(n)}(x_0) = y_n$

Věta T8.5 (o existenci řešení systému ODR 1. řádu – bez důkazu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ je spojitá maticová funkce. Pak existuje právě jedno řešení rovnice $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ definované na celém I.

⊢ 1. existence 2. jednoznačnost 3. na celém I !

⊢ Peano $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ f sp $\Rightarrow$ lokálně $\exists$ řešení

např: $y^{(n)} = \underbrace{b(x) - a_n(x)\cdot y^{(n-1)} \dots - a_0(x)\cdot y}_{\text{tohle je spojité (jako funkce } x, y, \dots, y^{(n-1)})}$

Věta L 8.6 (prostor řešení ODR 1. řádu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Označme

$$L(y) = y' - Ay \quad \text{a} \quad H = \operatorname{Ker} L = \{y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : L(y) = 0 \text{ na } I\}$$

Pak H je vektorový prostor dimense n. Označme M množinu všech řešení nehomogenního systému rovnic $Ly = y' - Ay = b$ a nechť y_0 je jedno pevné řešení $L(y_0) = b$. Pak $M = y_0 + \operatorname{Ker} L$.

Def $C^1(I, \mathbb{R}^n) = \{y : I \to \mathbb{R}^n : y_i$ je spojitá funkce z I do $\mathbb{R}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}\}$

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Příklad: • $y'' + y = x$

• $L(y) = 0 \dots \quad y'' + y = 0$

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$$

$$\operatorname{Ker} L = \{C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x ; \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$$

• partikulární řešení $y_0(x) = x$ řeší $y_0'' + y_0 = x$

Nyní všechna řešení mají tvar

$$x + C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

na $\mathbb{R}$.

22 – 3

Dk: $y' = Ay$, nechť $x_0 \in I$. Podle V 8.5. $\exists$ řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice $y' = Ay$ takové, že

$$y_1(x_0) = [1, 0, \dots, 0] = e_1$$
$$y_2(x_0) = [0, 1, \dots, 0] = e_2$$
$$\vdots$$
$$y_n(x) = [0, \dots, 1] = e_n.$$

Tvrdím, že $y_1, \dots, y_n$ tvoří bázi M. a) jsou to řešení ✓

b) lineární nezávislost: Nechť $\exists$ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$c_1 \cdot y_1(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x) = 0$ v $C^1(I, \mathbb{R}^n)$

Speciálně pro $x = x_0$: $c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + \dots + c_n \cdot e_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0.$

$$\underbrace{c_1 \cdot e_1 + \dots + c_n \cdot e_n}_{= [c_1, c_2, \dots, c_n]}$$

c) tvoří bázi: Nechť $y \in M$ tj. $y' = Ay$. Pak $y(x_0) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] =$

$= \alpha_1 \cdot y_1(x_0) + \dots + \alpha_n \cdot y_n(x_0)$

Podle V8.5. $\exists!$ řešení $y' = Ay$ s poč. podmínkou $y(x_0) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

Ale také $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \dots + \alpha_n \cdot y_n(x)$ řeší $y' = Ay$ s poč. podm. $y(x_0) = \alpha$

součet řešení je řešení

$\left((\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2)' = \alpha_1 \cdot Ay_1 + \alpha_2 \cdot Ay_2 = A \cdot (\alpha y_1 + \alpha y_2) \right)$

Z jednoznačnosti řešení $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n \cdot y_n(x)$.

Podle V8.5 $\exists$ řešení y_0 rovnice $y_0' = A y_0 + b$. 22 – 4

$y_0 + \mathrm{Ker}\, L \subset M$: Nechť $y \in M$, pak

$$(y_0 + y)' = A \cdot y_0 + b + A y = A \cdot (y_0 + y) + b \Rightarrow y_0 + y \in M.$$

$M \subset y_0 + \mathrm{Ker}\, L$: Nechť $y_1 \in M$, y_1 řeší $y_1' = A \cdot y_1 + b$.

Označme $y = y_1 - y_0$ (neboli $y_1 = y + y_0$). Pak

$$y' = y_1' - y_0' = A y_1 + b - (A \cdot y_0 + b) = A \cdot (y_1 - y_0) = A \cdot y \Rightarrow y \in H.$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Definice}}$ Libovolnou bázi $\{y_1, \dots, y_n\}$ prostoru $H (= \mathrm{Ker}\, (y' - Ay))$ (tedy libovolných n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice $y' = Ay$) nazýváno fundamentálním systémem řešení FSŘ homogenní rovnice $y' = Ay$.

- $y' = A(x) \cdot y + b(x)$ A .. konstantní matice $y' = A \cdot y + \underline{b(x)}$
- $y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots = b(x)$ $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot y(x) = \underline{b(x)}$

8.4 Rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = \cancel{\ } \ 0$$

Hledejme řešení ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$. $y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ $y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \dots + a_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_0 \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$(\ast)\quad e^{\lambda x} \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)}_{\text{polynom stupně } n \text{ v } \lambda.} = 0$$

Pozn.: $y'' + y = 0$ $\quad \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$

$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$; $e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$ jsou řešení

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x, \quad \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \sin x \text{ je řešení}$$

$C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$

$y'' - y = 0 \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$

Definice Nechť $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$ nazveme

charakteristickým polynomem

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 = 0.$$

$\boxed{\text{Věta T 8.7}}$ (FSŘ pro rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty)

Nechť jsou zadány $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristického polynomu s násobností $s_1, \dots, s_k$ (tedy $s_1 + \dots + s_k = n$). Pak funkce

$$\underline{e^{\lambda_1 x}}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1 - 1} \cdot e^{\lambda_1 x}, \dots, \underline{e^{\lambda_k x}}, \dots, x^{s_k - 1} \cdot e^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 \cdot y = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Dk: Podle V 8.6. stačí ukázat, že tyto funkce řeší ODR a jsou lineárně nezávislé.

1. krok Označme $L(y) = y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$ a $Q(\lambda)$ charakteristický polynom. Chceme $Q(\lambda) = 0 \Rightarrow L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \cdot Q(\lambda) = 0$ snadno z derivací $(e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ atd.

2. krok Nechť $\lambda = 0$ je s-násobný kořen $Q(\lambda) = 0$. Chceme ukázat, že $1, x, \dots, x^{s-1}$ patří do FSŘ.

0 je s-násobný kořen $\Rightarrow Q(\lambda) = \lambda^s \cdot P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_s \cdot \lambda^s$

Derivace $1, \dots, x^{s-1}$ řádu s a vyšší jsou 0 $\Rightarrow$ tyto funkce jsou řešení $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_s \cdot y^{(s)} = 0$