$$W_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{r_n(t)} X_{n,j} \qquad X_{n,j} \text{ p.m.d.} \qquad r_n(t) = \lfloor r_n \cdot t \rfloor \qquad t \in [0,1]$$

$$W_0^{(n)} = 0 \qquad W^{(n)} = \left(W_t^{(n)},\ t \in [0,1]\right) \xrightarrow[?]{d} \underbrace{W = \left(W_t, t \in [0,1]\right)}_{?\ \text{JAKÝ PROCES}}$$

$$\mathbb{E} f(W^{(n)}) \longrightarrow \mathbb{E} f(W) \quad \forall f \text{ omezenou, spojitou}$$

nič d_D

$$f: D[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in D[0,1] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$d_D(y,x) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Postačující podmínky pro slabou konvergenci

Věta: Nechť P_n, $n = 1, 2, \dots$, a P jsou pravděpodobnostní míry na $(D[0,1], d_D)$. Nechť

1) konečně-rozměrná rozdělení P_n konvergují slabě k odpovídajícím konečně-rozměrným rozdělením P, tedy $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall\, 0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le 1$, $\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P_{n, t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) \longrightarrow P_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) \quad \text{pokud}$$

$$P_{t_1, \dots, t_n}(\partial(B_1 \times \dots \times B_n)) = 0$$

Pokud X_n má rozdělení P_n a X má rozdělení P

$\forall n, \forall \pi_{t_1,\dots,t_n} : D[0,1] \to \mathbb{R}^n$

$$x \in D[0,1] \quad \pi_{t_1,\dots,t_n}(x) = \left(x(t_1), \dots, x(t_n)\right)$$

$$\pi_{t_1,\dots,t_n}(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{d} \pi_{t_1,\dots,t_n}(X)$$

2) $\{P_n\}$ je relativně kompaktní (z každé podposloupnosti lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost)

Pokud platí 1), 2), pak $P_n \xrightarrow{w} P$

Podmínka 2) je těžká na ověření

Věta: Je-li posloupnost $\{P_n\}$ těsná, pak je relativně kompaktní

Těsnost: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K$ kompaktní $P_n(K) > 1-\varepsilon$

Těsnost $\{P_n\}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K$ kompaktní tak že $P_n(K) > 1-\varepsilon \ \forall n$

Věta: Buď $\{W^n\}$ posloupnost stochastických procesů s hodnotami v $(D[0,1], d_D)$ a P_n rozdělení W^n. Pak posloupnost $\{P_n\}$ je těsná, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} P\Big[\sup_{\substack{|s-t| \leq \delta \\ s,t \in [0,1]}} |W_t^n - W_s^n| > \varepsilon\Big] = 0$$

Konečně-rozměrná rozdělení a jejich konvergence

<u>Věta:</u> (Cramér – Wold) Nechť $\{(Y_1^n, \dots, Y_k^n)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost k-rozměrných náhodných vektorů. Pak

$$(Y_1^n, \dots, Y_k^n) \xrightarrow{d} (Y_1, \dots, Y_k) \iff \forall\, \underline{a} \in \mathbb{R}^k \quad \sum_{i=1}^{k} a_i Y_i^n \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{k} a_i Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i Y_i \sim N(\cdot, \cdot)$$

$$a^T \mu \qquad a^T \Sigma a$$

$$(Y_1, \dots, Y_k) \sim N_k(\mu, \Sigma)$$

Gaussovské procesy

Definice: Wienerův proces na $[0,1]$ $\qquad W = (W_t, t \in [0,1])$

takový, že

1) $\forall k \ \forall \, 0 \le t_1 < \dots t_k \le 1$ má vektor

$$(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}) \sim N_k(\underline{0}, \underline{\Sigma_{t_1, \dots, t_k}})$$

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1 \wedge t_2 & \dots \\ & t_2 & t_2 \wedge t_3 & \dots \\ & & \dots \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{t_1, \dots, t_k} = (t_i \wedge t_j)_{i,j=1}^{k}$$

(odtud plyne nezávislost přírůstků $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}, W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ $i \neq j$)

$$\underset{i}{(0 \dots 0, -1, 1}, 0 \dots \underset{j}{0, -1, 1}, 0 \dots 0) \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{pmatrix}$$

2) $W_0 = 0$ s.j.

3) W má spojité trajektorie

Obecný (spojitý) centrovaný gaussovský proces na $[0,1]$ $\quad W = (W_t,\ t \in [0,1])$

1) konečně rozměrné rozdělení jsou $N(0, \Sigma)$

$$t_1 \to t_k \qquad \Sigma = \left(E(W_{t_i} W_{t_j}) \right)_{i,j=1}^{k} = \left(\operatorname{cov}(W_{t_i}, W_{t_j}) \right)_{i,j=1}^{k}$$

2) $W_0 = 0$ s.j.

3) W má spojité trajektorie

W Wienerův $\quad EW_t = 0 \quad \operatorname{var} W_t = EW_t^2 = t$

Obecný gaussovský proces z Wienerova

$$X_t = \int_0^t g(s)\, dW_s \qquad g \text{ deterministické funkce, } (g \in L^2[0,1])$$

$$\int_0^t g(s)\, dW_s \approx \sum_{i=0}^{N-1} g(t_i) \underbrace{\overbrace{\left(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i \wedge t}\right)}^{N(0,\, t_{i+1}\wedge t - t_i \wedge t)}}_{\text{vzájemně nezávislé}}$$

$$t_i = \frac{i}{N}$$

g^N pokud by g nebyla spojitá

$$N\left(0, \sum_{i=0}^{N-1} g^2(t_i)\left(t_{i+1}\wedge t - t_i \wedge t\right)\right)$$

$$\approx \int_0^t g^2(s)\, ds$$

$X = (X_t,\ t \in [0,1])$ je gaussovský proces (centrovaný, spojitý)

$$E X_t^2 = \int_0^t g^2(s)\, ds$$

$$E X_t X_u = \int_0^{\min(u,t)} g^2(s)\, ds$$