STABILITA

$\boxed{(AR) \qquad x' = f(x)}$ $\qquad f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ třídy C^1

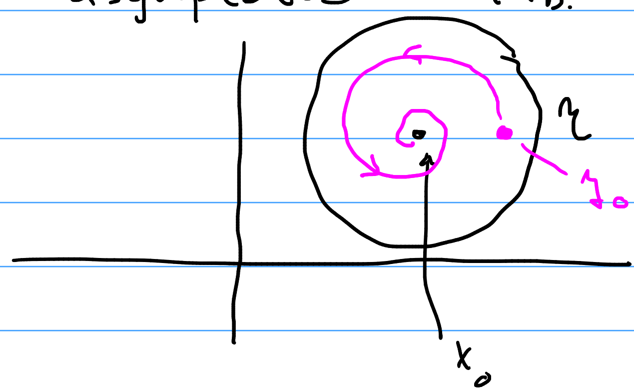
$x_0 \in \Omega$ je stacionární bod (AR), tj. $f(x_0) = 0$

DF Řekneme, že x_0 je
- stabilní, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |y_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |y(t) - x_0| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$
- nestabilní, jestliže není stabilní
- lokální atraktor, jestliže $\exists \eta > 0 \ |y_0 - x_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = x_0$.
- asymptoticky stabilní, jestliže je stabilní a zároveň lokální atraktor.

Vždy y značí řešení (AR) s p.p. $y(0) = y_0$.

v $\mathbb{R}^2$ stabilita

asymptotická stab.



VĚTA 1 (Stabilita pro lineární rovnice)
Nulové řešení rovnice $x' = Ax$, kde A je $n \times n$ matice, je
a) asymptoticky stabilní $\iff \operatorname{Re} \lambda < 0$ pro všechna vlastní čísla λ matice A
b) stabilní $\iff \operatorname{Re} \lambda \leq 0$ $\forall$ vlastní čísla matice A a navíc, je-li $\operatorname{Re} \lambda = 0$, pak Jordanovy buňky tohoto vl. čísla mají velikost 1

c) nestabilní $\iff$ když $\exists$ vl. číslo λ s $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$
nebo $\exists$ vl. číslo λ s $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ a Jordanovou buňkou větší než 1.

Př:

$$x_1' = -x_1 \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = 0$$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_{2,3} = 0$ Jord. buňka vel 1 $\Rightarrow$ nestabilní

$$x_1(t) = e^{-t} x_1(0)$$
$$x_2(t) = x_3(0)\cdot t + x_2(0) \quad \leftarrow \text{neomezené !}$$
$$x_3(t) = x_3(0)$$

Pro nelineární rovnice : $x' = f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Taylorův rozvoj : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \sigma(|x-x_0|^2)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ více proměnných : $f(x) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{f(x_0)} + \underbrace{\nabla f(x_0)}(x-x_0) + \sigma(|x-x_0|)$

matice $n\times n$, ozn. ji A

x_0 stacionární bod

(AR) přejde v $\quad x' = A(x-x_0) + \sigma(|x-x_0|)$

zavedeme $z := x - x_0 \qquad z' = (x-x_0)' = x'$

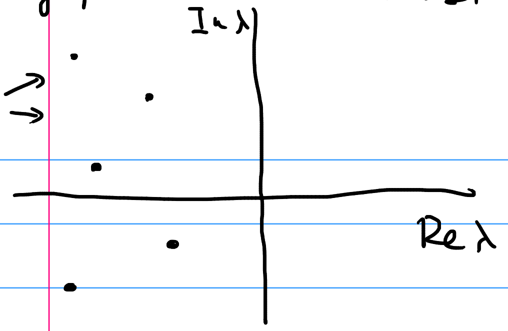
$$\rightsquigarrow \quad \underline{z' = Az} + \sigma(|z|)$$

pozn. je malá pro z blízko 0, tj. x blízko x_0.

VĚTA 2 : Stacionární řešení x_0 rovnice (AR) je
a) asymptoticky stabilní, pokud $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ $\forall$ vlastní čísla matice $A = (\nabla f)(x_0)$
b) nestabilní, pokud $\exists$ vlastní číslo λ matice $A = (\nabla f)(x_0)$ s $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

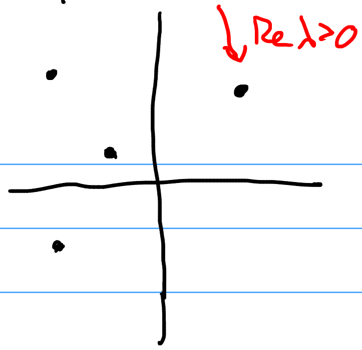
Pz : Implikace „$\Leftarrow$“

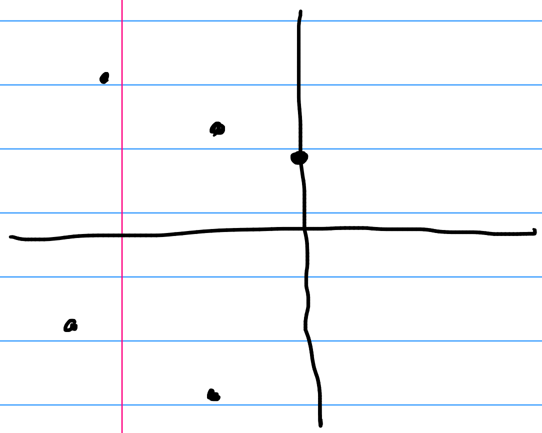
asymptotická stabilita



vlastní čísla

nestabilita





- pro lineární rovnici dokážeme rozhodnout dle Věty 1 ⇝ stabilita nebo nestabilita NE ASYMPTOTICKÁ
- pro nelineární rovnici NEDOKÁŽEME ROZHODNOUT může nastat kterákoli ze tří možností S, AS, neS.

Pr:

$$x' = 1 - x^2 - y^2$$
$$y' = z^2 - x - y$$
$$z' = z^2 - 1$$

Stacionární body:

$$1 - x^2 - y^2 = 0$$
$$z^2 - x - y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x + y = z^2 = 1$$
$$z^2 - 1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad z = \pm 1$$

$$x + y = 1 \qquad x = 1 - y$$
$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1-y)^2 + y^2 = 1$$
$$1 - 2y + 2y^2 = \cancel{1} \qquad 2y(y-1) = 0$$

- $y = 0,\ x = 1,\ z = \pm 1$ $\qquad [1, 0, \pm 1]$
- $y = 1,\ x = 0,\ z = \pm 1$ $\qquad$ 4 stac. body $\qquad [0, 1, \pm 1]$

Linearizujeme:

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \dots & \\ & & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 0 \\ -1 & -1 & 2z \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

$$[1, 0, 1] : \quad DF(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vl. čísla $\det\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2)$

$\rightsquigarrow \lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = -1$

bod $[1,0,1]$ je NESTABILNÍ $\Leftarrow$ $\lambda_3 = +2$

$[1,0,-1]$ $\quad \nabla F(1,0,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2 \Rightarrow$ ASYMPTOTICKY STABILNÍ

$[-1,0,1]$ ...

$[-1,0,-1]$ ...