Algebrou proti koronaviru VIII

Základy grup

1. Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa. Dokažte, že pokud prvek $e \in G$ splňuje $e \cdot g = g$ nebo $g \cdot e = g$ pro nějaké $g \in G$, pak $e = 1$.

2. Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa a $g \in G$. Dokažte, že pokud prvek $h \in G$ splňuje $h \cdot g = 1$ nebo $g \cdot h = 1$, pak $h = g^{-1}$.

3. Následující zčásti vyplněné tabulky zadávají nějakou binární grupovou operaci $\cdot$, tj. v buňce příslušné řádku x a sloupci y se nachází $x \cdot y$. Doplňte zbytek tabulky.

(a)

	a	b
a		b
b		

(b)

	a	b	c	d
a				b
b	d	c		
c				
d				

(c)*

	a	b	c	d	e	f
a						
b		c	a	e		
c						
d		f				b
e						
f						

4. Rozhodněte, zda existuje unární operace $'$ a prvek e takové, aby následující čtveřice byly grupami:

   (a) $(\mathbb{Z}, -, ', e)$,

   (b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *, ', e)$, kde $a * b = |a \cdot b|$,

   (c)⋆ $(\mathcal{P}(X), \Delta, ', e)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X a Δ je symetrická diference: $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

5. Jaký řád mají následující prvky?

   (a) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbf{S}_9$,

   (b) $(1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)(8\,9)$ v $\mathbf{A}_{2020}$,

   (c) 4 a 15 v $\mathbb{Z}$,

   (d) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$,

   (e) 7 v $\mathbb{Z}^*_{20}$,

   (f) rotace o $144°$ v $\mathbf{D}_{10}$,

   (g) rotace o $144°$ v $\mathbf{D}_{20}$,

   (h) prvek k v kvaternionové grupě $\mathbf{Q}$,

   (i) matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v $\mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$,

   (j) dvojice $\big((1\,2\,3)(4\,5), (1\,2\,3\,4)\big)$ v direktním součinu $\mathbf{S}_5 \times \mathbf{S}_4$.

6. Doplňte následující tabulku, kde v buňce v řádku k a sloupci $\mathbf{G}_n$ bude nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že grupa $\mathbf{G}_n$ bude obsahovat prvek řádku k. Raději předpokládejte, že $\mathbf{D}_{2n}$ je definováno jen pro $n \geq 3$.

	$\mathbf{S}_n$	$\mathbb{Z}_n$	$\mathbf{D}_{2n}$	$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$
2						
4						
11						
12						
1024						

7.* Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je *konečná* grupa a H neprázdná podmnožina G. Dokažte, že H tvoří podgrupu G právě tehdy, když je uzavřená na operaci $\cdot$ (tj. $\forall x, y \in H : x \cdot y \in H$).

8.* Nalezněte grupu G a její podmnožinu H, která bude uzavřena na grupovou operaci, ale nepůjde o podgrupu.

9.* Dokažte, že grupa, ve které má každý nejednotkový prvek řád 2, je už nutně komutativní.