NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
8. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Spojité náhodné vektory

Kovariance a korelace

Nerovnosti

Limitní věty – aproximace

Co už známe

- sdružená distribuční funkce

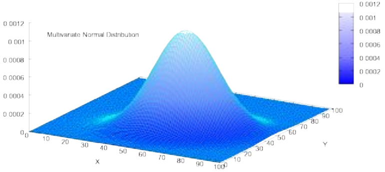
$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \,\&\, Y \leq y).}$$

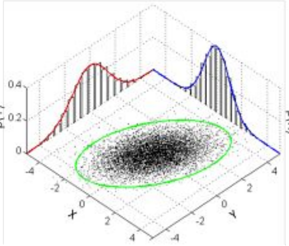
- sdružená hustota: $f_{X,Y} \geq 0$ taková, že

$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt.$$

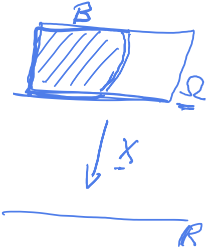
- důležitý příklad: vícerozměrné normální rozdělení





Obrázek od editorů Wikipedie Piotrg a Bscan.

Podmiňování



Definice (zúžení náhodné veličiny na množinu)

X je n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $B \in \mathcal{F}$, t.ž. $P(B) > 0$.

$$F_{X|B}(x) := P(X \leq x \mid B)$$

K tomu přísluší hustotní funkce $f_{X|B}$. $= F_{X|B}'$.

- pokud $B = \{X \in S\}$, tak

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X \in S)} & \text{pokud } x \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (x \notin S)$$

Věta o rozkladu hustoty

Věta (věta o rozkladu hustoty)

Nechť X je spojitá n.v., nechť $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω. Pak

$$F_X(x) = \sum_i P(B_i) F_{X|B_i}(x) \quad \textit{a}$$

derivace obou stran

$$f_X(x) = \sum_i P(B_i) f_{X|B_i}(x).$$

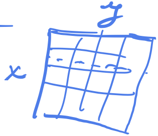
Důkaz: věta o úplné pravděpodobnosti. (Spec. případ byl na cvičení – dva algoritmy.)

$$P(X \le x) = \sum_i P(B_i) \cdot P(X \le x \mid B_i)$$

Marginální hustota

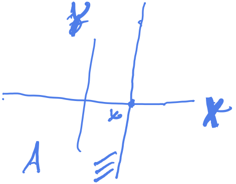
diskrétní náh. vektor $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$

$\sum p_X$



Věta

X, Y spoj. náh. vektor



$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$$

Dk

$F_X(x) = P(X \le x) = P((X,Y)\in A) = \int_A f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$

$A = \{(s,t): s \le x, t\in\mathbb{R}\}$

$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \bigcirc$

$\longrightarrow$ výraz v $\bigcirc$ je hustota f_X

Podmíněná hustota

pro diskr. n.v. $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = P(X=x|Y=y)$

Definice

Pro spojité n.v. X, Y definujeme podmíněnou hustotu (conditional pdf) předpisem

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

pokud je $f_Y(y) > 0$, jinak ji nedefinujeme.

- připomeňme, že $f_Y(y) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$
- pro fixované y je $f_{X|Y}(x|y)$ hustota $\Downarrow$

y fix

$$\int_{x\in\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y) = 1$$

n.v. $X|Y=y$ má hustotu $f_{X|Y}(x|y)$

Podmíněná, sdružená a marginální hustota

Věta

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,dy$$

$f_X = \int_{y \in R} \underline{f_{X,Z}}$

$X \to Z$

$Y \to X$

Součet spojitých n.v.

Věta

Nechť spojité X, Y jsou n.n.v. Pak $Z = X + Y$ je také spojitá n.v. a její hustotu dostaneme jako konvoluci funkcí f_X, f_Y, neboli

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx.}$$

$P_Z(z)$
$= \sum P_X(x) \cdot P_Y(z-x)$

Dk $f_{Z/X}(z/x) = f_Y(z-x)$

(n.v. $Z/X=x$ je stejná jako $Y+x$)

$P(Z=z/X=x) = P(Y=z-x)$

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z/X}(z/x) \cdot f_X(x)$

$= \int f_Y(z-x) f_X(x)$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad (X+Y)(\omega)$
$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad = X(\omega) + Y(\omega)$
$X+Y : \Omega \to \mathbb{R}$

Ukázka konvoluce

$\underline{X, Y \sim N(0,1)}$ n.n.v. $f_X = f_Y = \varphi$

$$\underline{\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}}$$

$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \underline{dx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{4}} \underbrace{\int e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx}_{4}$$

$$\underline{\int e^{-x^2} = \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4}}$$

.... hustota $N(0,2)$

Podmíněná hustota a střední hodnota

- $\mathbb{E}(X \mid B) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx$ DF
- $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|B}(x)dx$ věta LOTUS

Věta (o úplné střední hodnotě)

Nechť X je spojitá n.v. Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad, tak

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_i P(B_i)\mathbb{E}(X \mid B_i).}$$

Důkaz: pomocí rozkladu hustoty.

$$\int x f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_i P(B_i) f_{X|B_i}(x) = \sum_i P(B_i) \int x f_{X|B_i}(x)$$

Podmíněná hustota a střední hodnota

- $f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ je hustota n.v. X, pokud $Y = y$
- $\mathbb{E}(X \mid Y = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$ je střední hodnota této veličiny
- $\mathbb{E}(g(X)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$
- Analogie věty o úplné střední hodnotě:

$\sum \mathbb{E}(X|B_i)\, P(B_i)$

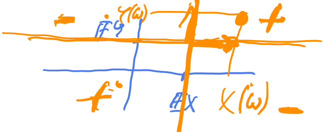
$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}(X \mid Y = y)}_{g(y)} f_Y(y)dy$$

" $\mathbb{E}(g(Y))$

- $\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y))}$

Přehled

Kovariance



Definice

Pro n.v. X, Y definujeme jejich kovarianci (covariance) předpisem

n.v. číslo n.v. číslo

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)).$$

$(X(\omega) - E(X)) \cdot (Y(\omega) - E(Y))$ ... $\forall \omega$ je reálné číslo

$\Omega \to \mathbb{R}$

Věta

$$\boxed{cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$$

lin. stř.

$E(XY - E(X) \cdot Y - X \cdot E(Y) + E(X)E(Y))$

$= E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

- $var(X) = cov(X,X)$ ✓
- $cov(X, aY + bZ + c) = a\,cov(X,Y) + b\,cov(X,Z)$
- $cov(X,Y) = 0$ pokud X,Y jsou nezávislé
- ale nejen tehdy

$E(X), E(Y)$ číslo

$E(\dots - E(X) \cdot Y - \dots) = \dots - E(E(X) \cdot Y) - \dots$

$\boxed{E(cY) = c\,E(Y)}$ $c = E(X)$

Korelace

Definice

Korelace náhodných veličin X, Y je definována předpisem

$\varrho(Y,X)$

$$\varrho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\,var(Y)}}.$$

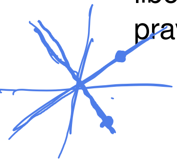
$\rho \doteq 1$ ---- $X \doteq Y$

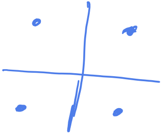
$\rho \doteq -1$ ---- $X \doteq -Y$

$\rho \doteq 0$

- je to „přenormovaná" kovariance
- $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$ (cvič.)
- Korelace neznamená příčinnou souvislost! (Např., korelace je symetrická, kauzalita nikoli!)
- Naopak, nekorelace neznamená nezávislost. (Př: X libovolná, $Y = +X$ nebo $Y = -X$, obojí se stejnou pravděpodobností.)

$X = \pm 1$





Rozptyl součtu

Věta

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Pak*

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j).$$

Spec. jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ *nezávislé, pak* $\Rightarrow cov(X_i, X_j) = 0$

$$var(X) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i).$$

Dk $\quad var\, X = E(X \cdot X) - (EX) \cdot (EX)$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} EX_j\right)$$

$$= E\left(\sum_{i,j} X_i X_j\right) - \sum_{i,j} E(X_i)E(X_j) = \sum_{i,j} EX_iX_j - EX_iEX_j$$

Přehled

Spojité náhodné vektory

Kovariance a korelace

Nerovnosti

Limitní věty – aproximace

Cauchyho nerovnost

Věta

Nechť X, Y mají konečnou střední hodnotu a rozptyl. Pak

$$\mathbb{E}(XY) \le \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

DK – jako Cauchyho ner. v LA

skal. součin X, Y --- $\mathbb{E}(X \cdot Y)$

norma X --- $\sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$

- Důsledek pro korelaci: $-1 \le \varrho(X, Y) \le 1$

Jensenova nerovnost

$g(t)=t^2$

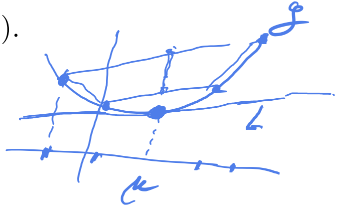
$\mathbb{E}(X^2) \geq (\mathbb{E}X)^2$

Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu a nechť g je konvexní reálná funkce. Pak

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) \geq g(\mathbb{E}\big(X\big)).$$

(Pro konkávní platí opačná nerovnost.)



Dk $\mu = \mathbb{E}(X)$ $\boxed{L(\mu) = g(\mu)}$

$\forall t$ $at+b = L(t) \leq g(t)$

$\Downarrow$

$L(X) \leq g(X)$

na dvou sdr. n.v.

fce $\Omega \to R$

$g(\mathbb{E}X) = L(\mathbb{E}X) = \mathbb{E}(L(X)) \leq \mathbb{E}g(X)$

Markovova nerovnost

$B_1 = \{X \geq a\}$ $B_2 = \{X < a\}$

Věta

Nechť náhodná veličina X *splňuje* $X \geq 0$. *Pak*

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Dk

$$\mathbb{E}(X) = P(X \geq a)\underbrace{\mathbb{E}(X \mid X \geq a)}_{\geq a} + \underbrace{P(X < a)}_{\geq 0}\underbrace{\mathbb{E}(X \mid X < a)}_{\geq 0}$$

$$\mathbb{E}(X) \geq P(X \geq a) \cdot a$$

$X(\omega)$ věk člověka ω $a = 2\mathbb{E}(X)$

Ω = skupina lidí $P(X \geq 2\mathbb{E}(X)) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2\mathbb{E}(X)} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ odp. 2 je ne.

Čebyševova (Chebyshev) nerovnost

$a > 0$

Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Pak

$$P(|X - \mu| \geq a \cdot \sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

$$\|$$

Dk $\quad Y = (X - \mu)^2$

$$P(Y \geq a^2\sigma^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2\sigma^2} = \frac{\mathrm{var}(X)}{a^2\sigma^2}$$

Markov

$$= \frac{\cancel{\sigma^2}}{a^2\cancel{\sigma^2}}$$

Chernoffova (Černovova) nerovnost

Věta

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *kde* X_i *jsou n.n.v. nabývající hodnot* ± 1 *s pravděpodobností* $1/2$. *Pak pro* $t > 0$ *platí*

$$P(X \leq -t) = P(X \geq t) \leq e^{-t^2/2\sigma^2},$$

kde $\sigma = \sigma_X = \sqrt{n}$.

Bez dk.

chebyshev dá

$$\frac{\text{const}\, n}{t^2} \gg e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Přehled

Silný zákon velkých čísel (strong law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou stejně rozdělené n.n.v. se stř. hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ tzv. výběrový průměr (sample mean). Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mu \quad \textit{skoro jistě (tj. s pravděpodobností 1).}$$

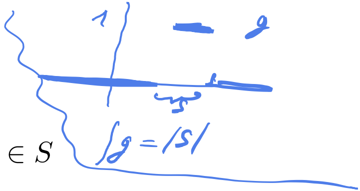
Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ skoro jistě (almost surely).

$$P\left(\lim_{n\to\infty} S_n = \mu\right) = 1$$

Monte Carlo integration

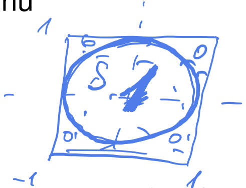
Jak spočítat $\int_{x \in A} g(x)dx$? $= \mu$

Speciálně:



$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

… obsah kruhu



$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x) = \pi$$

$\lambda(A) =$ plocha A $=$ plocha čtverce $[0,1]^2$

$\Omega = A^n$ … n nez. bodů z A

$X_i(\omega) = g(\omega_i)$

$$EX_i = \int_A g(x) \cdot \frac{1}{\lambda(A)} = \frac{\pi}{4} = \mu$$

TADY SNAZŠÍ: $EX_i = 1 \cdot P(X_i = 1) = 1 \cdot \frac{\pi}{4}$

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow \mu \quad \text{s.j.}$$

Slabý zákon velkých čísel (weak law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou stejně rozdělené n.n.v. se stř. hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ v pravděpodobnosti (in probability).

Centrální Limitní věta

Centrální Limitní věta

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ *jsou stejně rozdělené n.n.v. se střední hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2*. Označme* $Y_n = ((X_1 + \dots + X_n) - n\mu)/(\sqrt{n} \cdot \sigma)$*.*
Pak $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$*. Neboli, pokud* F_n *je distribuční funkce* Y_n*, tak*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \Phi(x) \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}.$$

Říkáme, že posloupnost Y_n *konverguje k* $N(0,1)$ *v distribuci (in distribution).*

Momentová vytvořující funkce

Definice

Pro náhodnou veličinu X označíme

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right).$$

Funkci $M_X(t)$ nazýváme momentová vytvořující funkce (moment generating function).

- $M_{Bern(p)}(t) = p \cdot e^t + (1-p)$.
- $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(X^n\right) \frac{t^n}{n!}$.
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$, jsou-li X, Y n.n.v.
- $M_{Bin(n,p)} = (pe^t + 1 - p)^n$
- $M_{N(0,1)} = e^{t^2/2}$
- $M_{Exp(\lambda)} = \frac{1}{1-t/\lambda}$
- Pokud $M_X(t) = M_Y(t)$ na intervalu $(-a, a)$ pro nějaké $a > 0$, tak je $X = Y$ s.j.