8. Obyčejné diferenciální rovnice

Motivace: 1. volný pád s odporem vzduchu.

↑ pozice v čase t je $y(t)$

víme: $y(t)$ dráha, $v(t) = y'(t)$ rychlost, $a = v'(t) = y''(t)$

$$m \cdot a(t) = F(t) = -mg + k \cdot v^2(t)$$

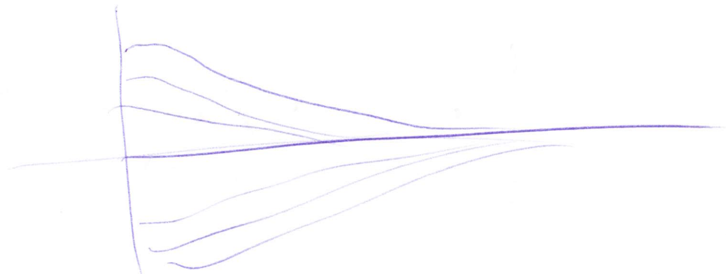
$$m \cdot v'(t) = -m \cdot g + k \cdot v^2(t)$$

$$v'(t) = \frac{k}{m} \cdot v^2(t) - g$$

při podmínce $v(0) = 0$

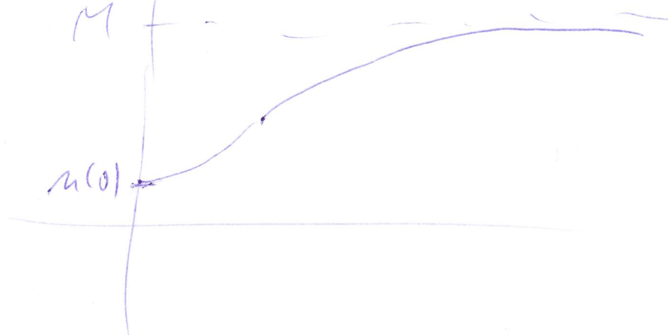
lze ukázat
$$v(t) = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \frac{1 + k_1 \cdot e^{-k_2 t}}{1 - k_1 \cdot e^{-k_2 t}}$$
$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_2 > 0$

$$v(t) \xrightarrow{t \to \infty} \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} = v_\infty$$



2. růst populace

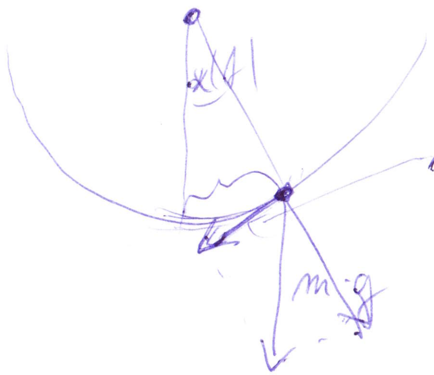
$$\frac{dn(t)}{dt} = k \cdot n(t) \cdot (M - n(t))$$



$$\frac{dn(t)}{dt} = k \cdot n(t)$$

$$\Rightarrow n(t) = n(0) \cdot e^{k \cdot t}$$

3. kyvadlo délky l, $x(t)$ je úhel kyvadla v čase t



$$m \cdot a = F = -m \cdot g \cdot \sin x(t)$$

dráha $s(t) = l \cdot x(t)$ $\quad v(t) = s'(t) = l \cdot \frac{dx(t)}{dt}$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = l \cdot \frac{d^2x(t)}{dt}$$

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2x(t)}{dt} = -m \cdot g \cdot \sin x(t)$$

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(x(t))$$

často se zjednoduší na: $\sin x \approx x$

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \cdot x(t)$$

$$x(t) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot x\right)$$

8.1. Řešení existence a jednoznačnost

$y' = f(x, y(x))$ má řešení, je-li f „~~...~~ hezká"

$f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojitá

Def Nechť $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Obyčejnou diferenciální rovnicí (ve zkratce ODR) n-tého řádu nazveme

$$\Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 . \quad (\boxtimes)$$

(Spousta jevů ve fyzice, chemii, biologii nebo ekonomii je popsána pomocí diferenciálních rovnic)

Def Řešení ODR na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je funkce $y(x)$ splňující

(i) existuje $y^{(k)}(x)$ vlastní pro $k = 1, \dots, n$ v I a všechna $x \in I$.

(ii) $(\boxtimes)$ platí pro všechna $x \in I$.

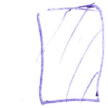
Řešení je dvojice (y, I)!

Def Řekneme, že $(\tilde{y}, \tilde{I})$ je rozšířením (y, I), pokud

(i) $\tilde{y}$ je řešení $(\boxtimes)$ na $\tilde{I}$ (ii) $I \subsetneq \tilde{I}$ (iii) $y = \tilde{y}$ na I.

Řekneme, že (y, I) je maximální řešení, pokud nemá rozšíření.

Cíle studia ODR:
- sestavit rovnici
- existuje řešení a kolik jich je? ~~$y'(x) = e^{-x^2}$~~
- najít všechna maximální řešení ~~(alespoň numericky)~~
- diskuse o jednoznačnosti a kvalitě řešení
- případná „fyzikální" interpretace.



Def Řekneme, že $I \subset \mathbb{R}^n$ je otevřený interval, pokud existují otevřené intervaly $I_1, I_2, \dots, I_n$ tak, že $I = I_1 \times \dots \times I_n$.

Nechť $c \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. Definujme (otevřenou) kouli jako

$$B(c,r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-c\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2} < r \}.$$

Def Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je otevřený interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in I$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \underset{[x_1,x_2]}{x} \in B(x_0,\delta) \cap I \text{ platí } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

~~Příklad: $h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá $\Rightarrow f(x,y) = h(x)$~~

Řekneme, že f je spojitá na I, pokud je spojitá ve všech bodech I.

Příklad: 1) $h(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá, $g(y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá $\Rightarrow f(x,y) = h(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$

$\tilde{f}(x,y) = g(y)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$

„Dk" ~~ε volme $\delta \Rightarrow$~~ $\forall \ [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$

nechť $\varepsilon > 0$ volme δ: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$: $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$.

Pak $\forall [x,y] \in B([x_0,y_0], \delta)$ platí: $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| =$

$= |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. $\square$

2) f_1 a f_2 spojité $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}^n$

$\tilde{f}(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Důsl: $P(x,y)$ polynom dvou proměnných je spojitá fce na $\mathbb{R}^2$ $\quad x^2 y + x^3 y^3$

$\underbrace{a(x) \cdot y^2}_{\operatorname{arctan} x \,\cdot\, y^2}$ je spojitá, je-li $a(x)$ spojitá fce x.

"Dk": f_1, f_2 spojité ~~$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$~~ $x_0 \in \mathbb{R}^2$ 18-5

~~$\forall x$~~ $\forall \varepsilon>0$ ($\varepsilon<1$) $\exists \delta>0\ \forall x \in B(x_0,\delta)$: $|f_1(x)-f_1(x_0)|<\varepsilon$ (*)

$|f_2(x)-f_2(x_0)|<\varepsilon$

Pak $|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x_0)| = |f_1(x)+f_2(x)-f_1(x_0)-f_2(x_0)| \leq$

$\leq |f_1(x)-f_1(x_0)| + |f_2(x)-f_2(x_0)| < 2\varepsilon \Rightarrow \tilde{f}$ spojitá v x_0

$\Rightarrow \tilde{f}$ spojitá na $\mathbb{R}^2$

$|f(x)-f(x_0)| = |f_1(x)\cdot f_2(x) - f_1(x_0)\cdot f_2(x_0) + f_1(x)\cdot f_2(x_0) - f_1(x)\cdot f_2(x_0)|$

$\leq |f_1(x)|\cdot|f_2(x)-f_2(x_0)| + |f_1(x)-f_1(x_0)|\cdot|f_2(x_0)| \leq$

{z (*) plyne $|f_1(x)| < |f_1(x_0)| + \varepsilon$}

$\leq (|f_1(x_0)|+\varepsilon)\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot|f_2(x_0)|$

$\overset{\{\varepsilon<1\}}{\leq} \varepsilon\cdot(|f_1(x_0)|+1+|f_2(x_0)|)$.

Věta T8.1 (Peano s $y^{(n)}$ – důkaz později)

Nechť $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřený interval, $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá a $[x_0, y_0, \dots, y_{n-1}] \in I$. Pak existuje $\delta > 0$ a okolí x_0 ($(x_0-\delta, x_0+\delta)$) a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR

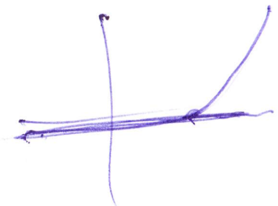
$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

s počáteční podmínkou

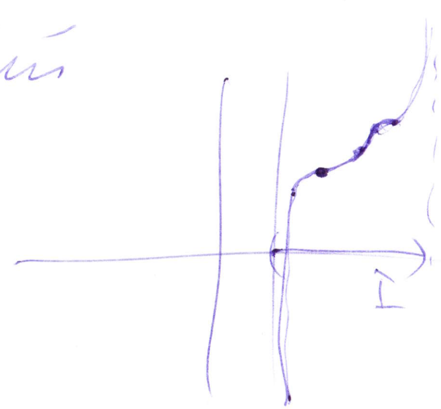
$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Poznámky: 1) Tato věta je lokální a δ může být velmi malé

2) Tato věta nedává jednoznačnost řešení ($y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}$)



3) Každé řešení lze rozšířit do maximálního řešení



Def. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený interval. Řekneme, že funkce $f: I \to \mathbb{R}$ je lokálně lipschitzovská vůči y, pokud $\forall\, U \subset I$ omezené existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že

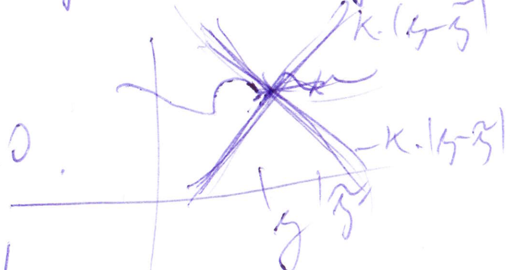
$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq K \cdot |y - \tilde{y}| \quad \forall\, [x,y] \in U \text{ a } [x,\tilde{y}] \in U$$

Příklad: a) $f(x,y) = h(y)$ a $h(y)$ má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$

~~$[a,b] \subset I$~~ ~~$\forall$~~ pak $\exists K$ $\quad |h'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b]$.

tak $\forall$ ~~$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})|$~~ $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |h(y) - h(\tilde{y})| =$

$$= |h'(\xi)| \cdot |y - \tilde{y}| \leq K \cdot |\tilde{y} - y|$$



$\Rightarrow$ na $\mathbb{R} \times [a,b]$ je $f(x,y)$ lipschitzovská.

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{y}$ není lipschitzovská v okolí $y = 0$.

$$|f(0,0) - f(0,y)| = |\sqrt[3]{y}| \not\leq K \cdot |y| \text{ pro malé } y$$

Věta 18.2 (Picard – důkaz později) Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený interval a $[x_0, y_0] \in I$. Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči y. Pak existuje $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a funkce $y(x)$ definovaná na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR $y'(x) = f(x, y(x))$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Navíc y je jediné řešení na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.