DÚ-dokončit příklad

(A)1.2.5. Kulový vodič K1 o poloměru $R1$ je obklopen soustřednou vodivou kulovou slupkou K2 o poloměru $R2$. Pro tuto soustavu vypočítejte kapacitní a influenční koeficienty a přesvědčte se, že platí Cik = Cki.

$$q_1 = C_{11}\varphi_1^0 + C_{12}\varphi_2^0$$
$$q_2 = C_{21}\varphi_1^0 + C_{22}\varphi_2^0$$

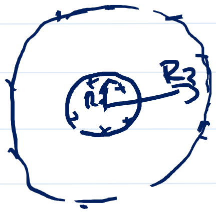
určete C

φ_1^0 – potenciál K_1

φ_2^0 = potenciál K_2

$\varphi_1^0(q_1,q_2)$, $\varphi_2^0(q_1,q_2)$ $\Rightarrow$ $q_1 = q_1(\varphi_1^0,\varphi_2^0)$

$q_2 = q_2(\varphi_1^0,\varphi_2^0)$



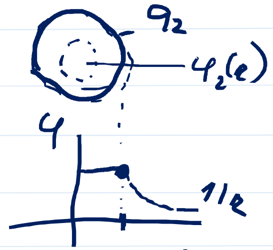
$K_1^{q_1}$

K_1 budí potenciál

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} \qquad r > R_1$$

příspěvek koule K_2

$$\varphi_2(r) = K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} \qquad R_1 \le r \le R_2$$



celkový potenciál

$$\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2}\right) \qquad R_1 \le r \le R_2$$

Potenciál koule K_1: $\varphi_1^0 = \varphi(r)\big|_{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right)$, koule K_2: $\varphi_2^0 = \varphi(r)\big|_{r=R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2}$

① $\varphi_1^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2}\right)$ q_1 ① − ② $\varphi_1^0 - \varphi_2^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2} \Rightarrow q_1$ – DÚ

② $\varphi_2^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2}{R_2}\right)$ q_2 $\frac{1}{R_2}$① − $\frac{1}{R_1}$② $\Rightarrow q_2$ DÚ

$C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$ vyčetěte $\underbrace{C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21}}$ DÚ

$C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2^2}{R_2-R_1}$ určete kapacitu C

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}}$$

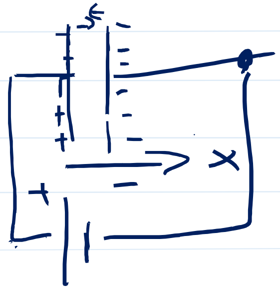
$$\underline{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}}$$

DÚ

(S)1.2.11. Deskový kondenzátor má kapacitu C =100 pF. Jak se tato kapacita změní, vložíme-li mezi desky paralelně vodivý plech, jehož tloušťka je rovna čtvrtině vzdálenosti elektrod. Má poloha plechu vliv na výslednou kapacitu?

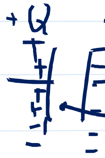
$$\underbrace{C'}_{\text{po vložení}} = \frac{4}{3}\underbrace{C}_{\text{původní}}$$

(S)1.4.2. Jaká síla působí na elektrody deskového kondenzátoru nabitého na napětí U? Plocha desek je S a jejich vzdálenost x.



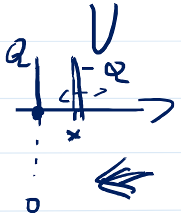
1) $Q = konst.$ $\qquad Q = U C$

$+Q \quad -Q \qquad Q/S \qquad F = ?$



$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\qquad W \ldots$

$U = E\,d$ $\qquad \boxed{F\,dx = -dW}$



$W =$ energie kond. n.

$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

$\boxed{F = -\frac{dW}{dx}}$ $\qquad \boxed{\vec{F} = -\nabla W}$

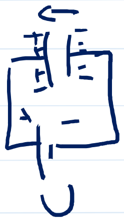
1) $F = -\frac{dW_{kond}}{dx}\Big|_{Q=konst}$ $\qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$

$F = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$

$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} x}$

$F = -(-1)\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dx}\Big|\ U = konst$

2) $U = konst.$



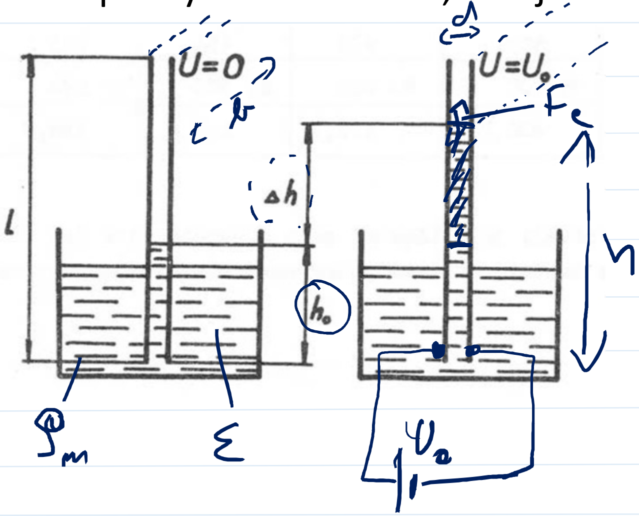
$W =$ $\qquad F = -\frac{dW_{kond}}{dx}\Big|_{U=konst}$

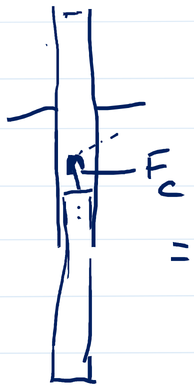
$W = \frac{1}{2}U^2 C - QU = -\frac{1}{2}U^2 C = -W_{kond}\big|_{U=konst}$ energie systém s baterií

$F = \frac{dW_{kond}}{dx}\Big|_{U=konst}$

$F = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}U^2 C = \frac{1}{2}U^2\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2}U^2 \varepsilon_0 S \frac{1}{x^2}$

(S)1.4.6. Do kapalného dielektrika jsou ponořeny dvě paralelní vodivé desky (viz obr.). Nejsou-li desky nabity, vystoupí hladina kapaliny mezi deskami do výšky h_0 (měřeno od dolního okraje desek. O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami, nabijeme-li desky na napětí U_0? Permitivita kapaliny je ε, vzdálenost desek d.





plocha desek $S = l \cdot b$

$$\underline{F_e} = \frac{dW_{kond}}{dh}\Big|_{U=konst} = \frac{1}{2}U_0^2\left(\varepsilon\frac{b}{d} - \varepsilon_0\frac{b}{d}\right) = \frac{1}{2}\frac{U_0^2 b}{d}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

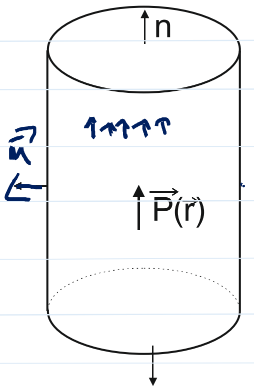
$$W_{kond} = W_{kond}(h) = \frac{1}{2}U_0^2\cdot\frac{\varepsilon h b}{d} + \frac{1}{2}U_0^2\,\frac{\varepsilon_0 (l-h)\, b}{d}$$

$$\Delta h \Rightarrow \quad \underline{F_g} = \Delta V \rho g = \Delta h \cdot b \cdot d\, \rho g = \underline{F_e} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2}\frac{U_0^2 b}{d}$$

$$\boxed{\Delta h = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\rho g}\underbrace{\frac{U_0^2}{d^2}}_{E^2}}$$

1 2

Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce



$\vec{P}(\vec{r})=(0,0,P_0)$

$\vec{P}(\vec{r})=0$ vně válce

Polarizace $\vec{P}(\vec{r}) = (0,0,P_0)$ uvnitř válce

$\vec{P}(\vec{r})=0$ vně válce

oblast V popsaná polarizací $\vec{P}$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma_p}{R}\,dS' + \int_V \frac{\rho_p\,dV'}{R}$$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

$\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$

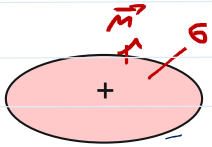
$\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}$

normála k S

lze nahradit objemovými náboji $\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$

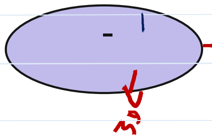
a plošnými σ $\vec{P}\cdot\vec{n}$; na plášti válce $\vec{P}\perp\vec{n} - \sigma = 0$

na podstavách $\sigma = \pm P_0$



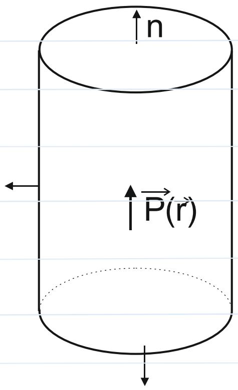
$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$

$\sigma_v = P_0$



$\sigma_v = -P_0$

Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce



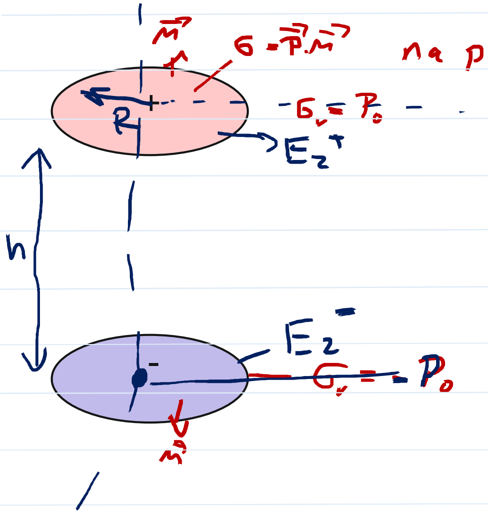
$\vec{P}(\vec{r})=(0,0,P_0)$

$\vec{P}(\vec{r})=0$ vně válce

lze nahradit objemovými náboji $\rho_v = -\operatorname{div}\vec{P} = 0$

a plošnými σ $\quad \vec{P}\cdot\vec{n}$; na plášti válce $\vec{P} \perp \vec{n} \Rightarrow \sigma = 0$

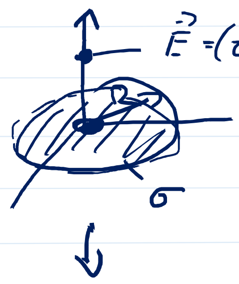
$\sigma = \vec{P}\cdot\vec{n}$ na podstavách $\sigma = \pm P_0$



$z = h$

$z = 0$

Pole nabitého kruhu v počátku



$\vec{E}=(0,0,E_z)$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z>0$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z<0$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} \quad \text{pro } \forall z$$

$$E_z = E_z^+ + E_z^- = \frac{-P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{z-h}{|z-h|}$$

Chování vektoru $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na ose v místě podstavy chování ve válci $\boxed{0 \leq z \leq h} \Rightarrow |z| = z \qquad |z-h| = h-z$

$$E_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{z-h}{|z-h|}$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h-z}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)(-1)$$

$$E_z\Big|_{z \to h} = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) - \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - 0\right) =$$

$$= -\frac{P_0}{\varepsilon_0} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\frac{h}{\sqrt{}}$$

$\boxed{\text{DÚ}}$

totéž pro $z \geq h$ mát $E_z\Big|_{z \to h^+}$

ověřit chování $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\qquad P_z = P_0$ ve válci

$D_z\Big|_{z \to h^-}$ a $D_z\Big|_{z \to h^+}$ $\qquad D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z \qquad P_z = 0$ mimo válec

(S)1.3.4. Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru je vyplněn dvěma stejně velkými dielektriky o permitivitách ε_1a ε_2. Jaká bude kapacita kondenzátoru, je-li rozhraní mezi dielektriky
a) rovnoběžné s elektrodami
b) kolmé k elektrodám?
Čemu bude roven poměr obou kapacit?

DÚ

+ S 1.2.2.

O kolik voltů by se zvětšil potenciál Země, kdyby se na jejím povrchu rozprostřel náboj 1C.

Jaká je kapacita Země

DÚ

Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce

Přesněji: za využití výsledku získaného na cvičení (viz dole)

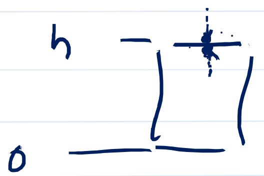
vyjádřete E_z pro $0<z<h$ uvnitř válce

pro intenz. na ose E_z pro $z>h$ vně válce

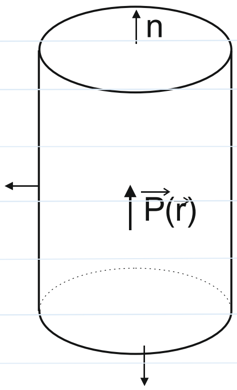
vyjádřete indukci $\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\to D_z}$ na ose také uvnitř a nad válcem

a ověřte chování normálových složek $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na horní podstavě válce.

tj E_z pr $z \to h$ zdola / shora



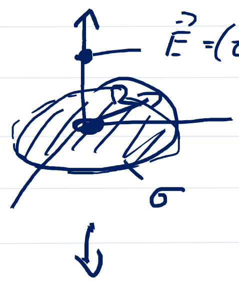
Určete pole na ose homogenně polarizovaného válce



$\vec{P}(\vec{r})=(0,0,P_0)$

$\vec{P}(\vec{r})=0$ vně válce

Pole nabitého kruhu v počátku



$\vec{E}=(0,0,E_z)$

$$E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z>0$$

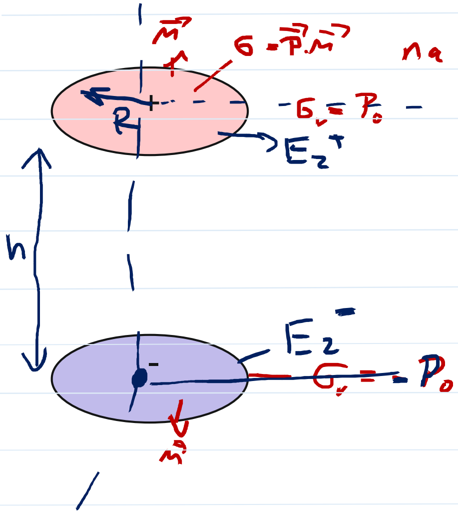
$$E_z=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \quad z<0$$

$$\Rightarrow E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} \quad \text{pro } \forall z$$

lze nahradit objemovými náboji $\rho_v=-\operatorname{div}\vec{P}=0$

a plošnými σ $\vec{P}\cdot\vec{n}$; na plášti válce $\vec{P}\perp\vec{n} \Rightarrow \sigma=0$

$\sigma=\vec{P}\cdot\vec{n}$ na podstavcích $\sigma=\pm P_0$



$z=h$

$$E_z=E_z^++E_z^-=\frac{-P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|}+\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{z-h}{|z-h|}$$

$z=0$

Chování vektoru $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na ose v místě podstavy chování ve válci $\boxed{0 \le z \le h} \Rightarrow |z| = z \qquad |z-h| = h-z$

$$E_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z-h|}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)\frac{z-h}{|z-h|}$$

$$\Rightarrow E_z = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h-z}{\sqrt{R^2+(z-h)^2}}\right)(-1)$$

$$E_z\Big|_{z \to h} = -\frac{P_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) - \frac{P_0}{2\varepsilon_0}(1-0) =$$

$$= -\frac{P_0}{\varepsilon_0} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\frac{h}{\sqrt{}}$$

$\boxed{\text{DÚ}}$

totéž pro $z \ge h$ mají $E_z\Big|_{z \to h^+}$

ověřit chování $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\qquad P_z = P_0$ ve válci

$D_z\Big|_{z \to h^-}$ a $D_z\Big|_{z \to h^+}$ $\qquad D_z = \varepsilon_0 E_z + P_z \qquad P_z = 0$ mimo válec