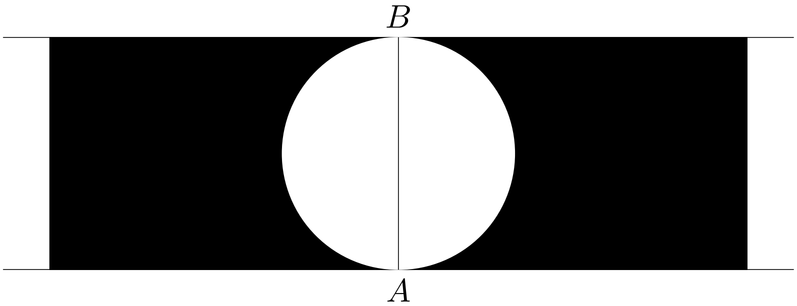
Geometrická pravděpodobnost

V některých situacích je přirozené popsat prostor Ω všech elementárních jevů nějakým geometrickým útvarem. Pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ pak můžeme definovat jako $P(A) = |A|/|\Omega|$, kde $|A|$ značí „velikost" (objem, plocha, délka, ...) množiny A. Potřebujeme, aby prostor Ω měl kladnou a konečnou „velikost" a všechny jeho prvky měly „stejnou váhu".

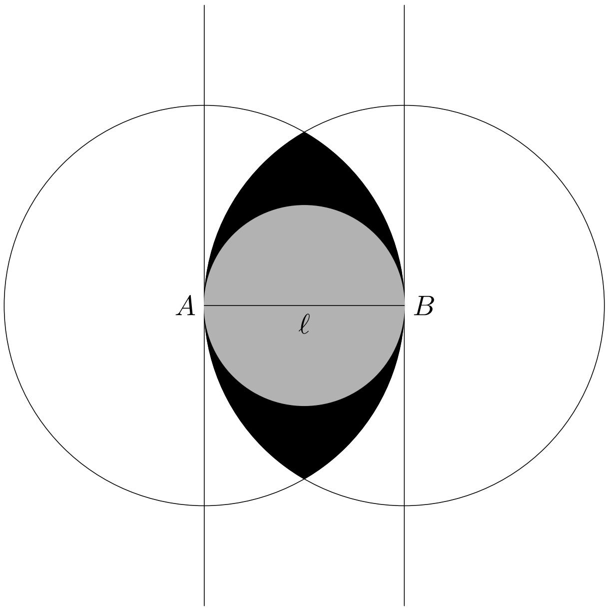
Problém tří bodů

Zadání: (W. S. Woolhouse, 1861) Jaká je pravděpodobnost, že tři náhodně zvolené body v rovině tvoří ostroúhlý trojúhelník?

Řešení: Pro danou stranu AB jsou příznivé pozice vrcholu C tvořeny pásem nad stranou AB bez kruhu o průměru AB. Geometrickou pravděpodobnost nemůžeme použít, protože příslušné oblasti jsou neomezené. I přesto A. De Morgan (1871) argumentoval, že hledaná pravděpodobnost je nekonečně malá.



Ch. L. Dodgson (známý pod pseudonymem L. Carroll) uvažoval následovně. Kdybychom předpokládali, že AB je nejdelší strana, potom C může ležet kdekoli v průniku kruhů o poloměru $\ell = |AB|$ a středech A a B.

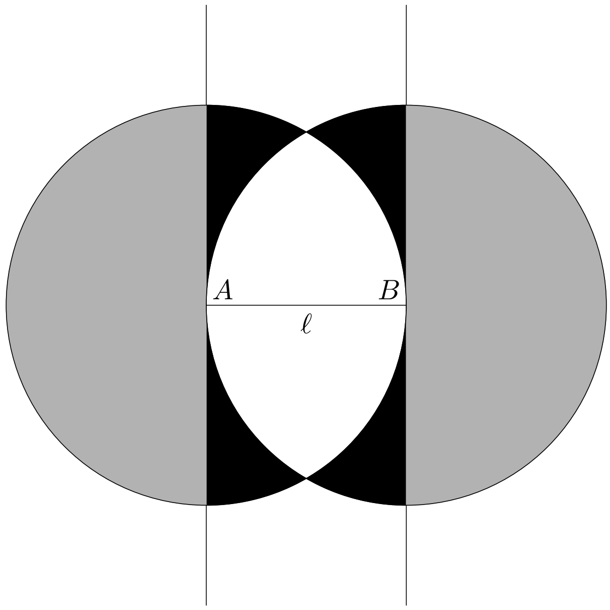


Tento průnik má obsah $2\pi\ell^2/3 - \sqrt{3}\ell^2/2$. Polohy bodu C uvnitř kruhu nad průměrem AB vedou na tupoúhlý trojúhelník, tato oblast má obsah $\pi\ell^2/4$. Pravděpodobnost, že výsledný trojúhelník bude ostroúhlý, je

$$1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \doteq 0{,}361.$$

Ovšem když zopakujeme celou úvahu pro případ, kdy AB je druhá nejdelší strana, pak dostáváme pravděpodobnost

$$1 - \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}} \doteq 0{,}179.$$



Případ s nejkratší stranou AB vede na neomezenou oblast pro možné polohy C.

Jiný způsob, jak chápat náhodné rozmístění tří bodů v rovině, spočívá v tom, že si zvolíme kruh (dostatečně velký) a v něm rovnoměrně náhodně tři body. Dá se ukázat, že pravděpodobnost, že vznikne ostroúhlý trojúhelník, je $4/\pi^2 - 1/8 \doteq 0{,}280$, a to bez ohledu na to, jak velký kruh jsme zvolili. Pro jiné volby omezených oblastí, ve kterých volíme náhodně tři body, obdržíme odlišné pravděpodobnosti. Například pro čtverec to je $53/150 - \pi/40 \doteq 0{,}275$.

Dostáváme různé výsledky podle toho, jak jsme popsali náhodnou volbu tří bodů v rovině. Vždy nám ale vyšlo, že je pravděpodobnější obdržet tupoúhlý než ostroúhlý trojúhelník. Uveďme ještě jednu variantu, jejíž výsledek 1/4 vychází i při některých jiných přístupech.

Problém tří bodů na kružnici

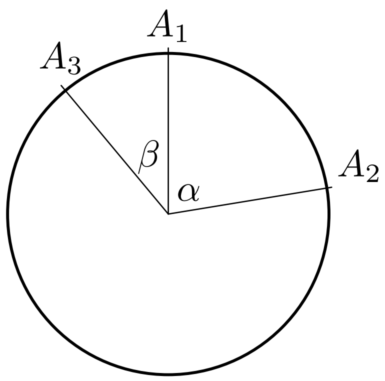
Zadání: Na kružnici zvolíme rovnoměrně náhodně tři body. Jaká je pravděpodobnost, že tvoří ostroúhlý trojúhelník?

Řešení: Označme zvolené body A_1, A_2 a A_3. Podle Thaletovy věty je trojúhelník $A_1A_2A_3$ pravoúhlý jen, když dva z těchto bodů leží na průměru kružnice, což má nulovou pravděpodobnost. Nechť C_k značí jev, že na půlkružnici začínající v A_k leží ve směru hodinových ručiček oba zbývající vrcholy. Všimněme si, že

$$P(C_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

protože oba vrcholy mají pravděpodobnost $1/2$, že budou v dané půlkružnici. Evidentně může nastat nanejvýš jeden z jevů C_1, C_2 a C_3. Přitom pokud nastane jeden z nich, tak je trojúhelník tupoúhlý. Odtud vidíme, že pravděpodobnost obdržení tupoúhlého trojúhelníku je $P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = 3/4$. Výsledný trojúhelník bude ostroúhlý s pravděpodobností $1/4$.

Jiná možnost je zafixovat jeden vrchol a označit délky oblouků ke zbylým vrcholům jako α a β (viz obrázek).



Tyto délky musí splňovat $0 \leq \alpha + \beta \leq 2\pi$ (předpokládáme jednotkovou kružnici). Ostroúhlý trojúhelník vznikne, jestliže $\alpha < \pi$, $\beta < \pi$ a $\alpha + \beta > \pi$. To opět vede na pravděpodobnost $1/4$ (viz obrázek).