X $\mathcal{F}_t$ predikovatelný, omezený

M martingal, zprava spojitý, $\mathcal{F}_t$, $|M_v| < \infty$, $E|M_v| < \infty$

(I2) $E|M_v|^2 < \infty$

$\int X\,dM$ je $\mathcal{F}_t$-martingal

+(I2) $\int X\,dM$ je L_2-martingal $\langle \int X\,dM, X\,dM \rangle_t = \int_0^t X^2\,d\langle M, M \rangle$

Čítací proces N je submartingal

$\exists$ $\mathcal{F}_t$ predikovatelný zprava spojitý rostoucí, $A_0 = 0$ $N - A$ je $\mathcal{F}_t$-martingal

a chceme jej použít k integrování

N čítací proces – skoky o velikosti 1

např. Poissonův proces $N_T \sim Po(\Lambda(T))$ $EN_T = \Lambda(T)$

$$EN_T^2 = \Lambda(T) + \Lambda^2(T)$$

$$A_t = \Lambda(t)$$

a máme zaručeno $E(N_T - A_T)^2 < \infty$

úplné variace martingalu $M = N - A$ je $N + A = |M_V|$

$$\int X \, dM = \int X \, d(N - A)$$

$$\left\langle \int X \, dM, \int X \, dM \right\rangle = \int X^2 \, d\langle M, M \rangle$$

Je-li N Poissonův proces a $N_t - \Lambda(t)$ s ním spojený martingal, pak prediktabilní variace $N_t - \Lambda(t)$ je opět Λ

$EN_t = \Lambda(t)$ $\qquad$ $E\left(N_t - \Lambda(t)\right)^2 = \operatorname{var} N_t = \Lambda(t)$

<u>Věta 10:</u> Buď N čítací proces, $EN_T < \infty$, A kompenzátor, $N - A$ je martingal a nechť $EM_T^2 = E(N_T - A_T)^2 < \infty$

Doobův-Meyerův rozklad $\qquad E(\underbrace{N_T + A_T}_{|M_v|_T})^2 < \infty$

nechť A je <u>spojitý</u>.

Pak $\langle M, M \rangle = A$

Důkaz: Per-partes pro Lebesgueovo-Stieltjesův integrál

X a Y dva procesy s konečnou úplnou variací

$$\boxed{\int_{[0,t]} X_{s+}\, dY_s + \int_{[0,t]} Y_{s-}\, dX_s = X_{t+} Y_{t+} - X_{0-} Y_{0-}}$$

$X = M$
$Y = M$

$M = N - A$ je zprava spojitý $M_{t+} = M_t \ \forall t$, $M_0 = 0 \text{ "=" } M_{0-}$

$$M_t^2 = \int_{[0,t]} M_s\, dM_s + \int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s = 2\int_{[0,t]} M_s\, dM_s - \int_{[0,t]} \Delta M_s\, dM_s$$

$$M_{s-} = M_s - \underbrace{(M_s - M_{s-})}_{\Delta M_s}$$

0 tam, kde skok není!
ΔM_s tam, kde skok je

$$M_t^2 = 2\int_{[0,t]} M_s\, dM_s - \sum (\Delta M_s)^2$$

-1

$$\underbrace{N_s - N_{s-}}_{\in\{0,1\}} + \cancel{(A_s - A_{s-})} \quad 0$$

F_t - prediktabilní?

předpoklad spojitosti

$$\sum N_s - N_{s-} = N_t$$

$$2\int_{[0,t]} M_s\, dM_s = 2\int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s + 2\int_{[0,t]} \underbrace{(M_s - M_{s-})}_{\Delta M_s}\, dM_s$$

$+2$

$$M_t^2 = 2\int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s + \sum (\Delta M_s)^2 = 2\int_{[0,t]} M_{s-}\, dM_s + N_t$$

$$M_t^2 = \underbrace{2\int_{[0,t]} M_{s-}\,dM_s}_{\text{martingal}} + \underbrace{N_t}_{\text{submartingal}}$$

M martingal s konečnou úplnou variací

M_{s-} je ZLEVA spojitý

tedy $\mathcal{F}_t$-predikovatelný

$$M_t^2 = \text{martingal} + N_t$$

A_t: $\mathcal{F}_t$-predikovatelný spojitý

$$M_t^2 - A_t = \overbrace{\text{martingal} + \overbrace{(N_t - A_t)}^{\text{martingal}}}^{\text{martingal}}$$

Z jednoznačnosti Doobova-Meyerova rozkladu plyne, že

$$A_t = \langle M, M \rangle_t \quad \text{s.j.}$$

$$E \int_0^T (M_{s-})^2 \, d|M_v| < \infty$$

$$E \int_0^t \underbrace{|M_{s-}|^2}_{\leq (N_{s-} + A_{s-})} \, d|M_v|$$