Algebra — cvičení 7

(příklady cihlovou barvou jsme dělali on-line, na doma jsou ty ostatní bez hvězdiček)

Faktorokruhy a kořenová/rozkladová nadtělesa

1. Ověřte, že je $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$ těleso a spočítejte α^2 = -1 = 2
   (a) α^5 α^5 = (-1)(-1)α
   (b) α^{-1} (2α)α = 2α^2 = 2(-1) = 1... hledaný inverzní prvek je 2α = -α
   (c) $(\alpha+1)^{-1}$
   (d) $2\alpha\cdot(2\alpha+1)$
   (e) $\alpha^{-1}\cdot(\alpha+2)$ α^4+α^3+α+2 = (α^2+1)(α^2+α+2)
2. V okruhu $\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+\alpha+2)$ najděte prvek, který nemá inverz. ired. st. 2 nad Z_3: α^2+1, α^2+α+2, α^2+2α+2
3. Buď T těleso a $a\in T$. Dokažte, že je těleso $T[\alpha]/(\alpha-a)$ izomorfní tělesu T.
4. Dokažte, že je těleso $\mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^3-2)$ izomorfní tělesu $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
5. Napište všechna kořenová a rozkladová nadtělesa polynomů
   (a) x^2-2 Q(sqrt(2)) = Q(-sqrt(2)) ... jediné kořenové a zároveň rozkladové
   (b) x^3-2x^2-2x-3
   (c)* x^n-1

   nad tělesem $\mathbb{Q}$ obsažená v $\mathbb{C}$.
6. Popište rozkladové nadtěleso polynomu x^2+x+1 nad $\mathbb{Z}_2$ a rozložte v něm daný polynom na lineární členy.
   Z_2[α]/(α^2+α+1) =: F ... α je kořenem x^2+x+1 v tělese F
   x^2+x+1 = (x-α)(x-(α+1))

Další počítání

7. V tělese $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^3+\alpha+1)$ spočtěte α^3 = -α-1
   (a) $(3\alpha^2+4\alpha+1)+(2\alpha^2+4)$ 4α
   (b) $(3\alpha^2+4\alpha+1)\cdot(2\alpha^2+4)$
   (c) $(2\alpha^2+4)^{-1}$ α(α^2+1) = α^3+α = -1 = 4
   (d) řešení lineární rovnice $\alpha\cdot x+(\alpha+1)=\alpha^2$ αx = α^2-α-1 ===> x = (α^2-α-1)(-α^2-1) = ...
8. Napište tabulky operací čtyřprvkového tělesa.
9. Buď $T=\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4+\alpha^3+1)$. Najděte ireducibilní rozklad polynomu x^3-1 v $T[x]$.

11.* Ověřte, že je $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^3+\alpha+1)$ těleso a najděte v něm všechny kořeny polynomu x^7+1.

12.* Dokažte, že v tělese $T=\mathbb{Z}_3[\alpha]/(\alpha^2+1)$ najdete prvek u s vlastností, že každý nenulový prvek tělesa T lze napsat jako mocninu u. Napište ireducibilní rozklad polynomu x^8-1 v $T[x]$.

13.* Dokažte, že existuje izomorfismus mezi okruhy $\mathbb{Z}_5[\alpha]/(\alpha^4-1)$ a $\mathbb{Z}_5^4$.

14.* Je následující polynom symetrický?

$$(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$$

15.* Vyjádřete následující symetrické polynomy jako součet součinů elementárních symetrických polynomů:

(a) $3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2$,

(b) $x^3(y + z) + y^3(x + z) + z^3(x + y)$.