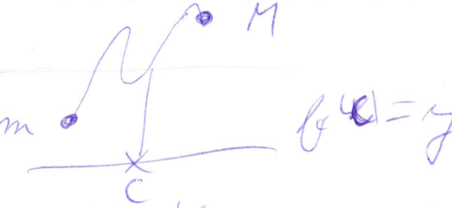
- spojitá funkce nabývá mezihodnot

$$\frac{\int_a^b f\cdot g}{\int_a^b g} = y$$



$\boxed{\text{Věta L 7.15}}$ (věta o střední hodnotě integrálního počtu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$, g je nezáporná na $[a,b]$, $g \in N(a,b)$ a $f\cdot g \in N(a,b)$.

Potom existuje $c \in [a,b]$ tak, že $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(c)\cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

Dk: f je spojitá na $[a,b]$, tedy nabývá mezihodnot.

Také je na $[a,b]$ omezená, označíme $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

Pak $m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x)$ (*) (g je nezáporná)

Je-li $\cancel{g \equiv 0}$ $\int_a^b g = 0 \overset{g\geq 0}{\Rightarrow} g \equiv 0 \Rightarrow$ volíme c libovolně.

Nechť $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Pak z (*) dostaneme integrací

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

f nabývá mezihodnot, a proto $\exists\, c \in [a,b]$ tak, že $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$ □

7.4. Aplikace ~~...~~ určitého integrálu

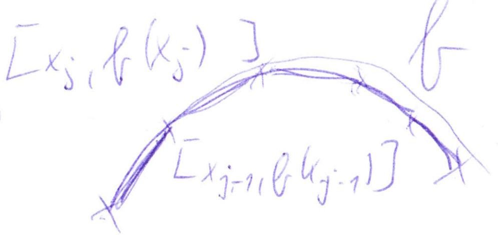
Def Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkce, pak obsahem plochy pod grafem funkce nazveme

$$\text{Obsah}(f, [a,b]) = (R) \int_a^b f(x)\,dx = (N) \int_a^b f(x)\,dx.$$

~~**Věta T 7.16** (délka křivky) Nechť f má na intervalu $[a,b]$ spojitou první derivaci~~

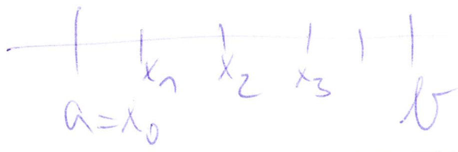
Def Nechť f ~~je~~ $: [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a,b]$.

Označme $L(f,D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} = \circledast$



Délkou křivky f nazveme

$$L(f, [a,b]) = \sup\{L(f,D);\ D \text{ dělení } [a,b]\}.$$



Věta T7.16 Nechť f má na intervalu $[a,b]$ spojitou první derivaci. Pak ~~L(f,[...~~

$$L(f, [a,b]) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$\circledast = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}$$

$$\doteq \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(x_j))^2}$$

Dk: Označme $g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$.

$\sup L(f,D) = L \underset{\geq}{=} \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Mějme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Pak

$$L(f,D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j-x_{j-1})^2 + (f(x_j)-f(x_{j-1}))^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}\right)^2} = \sum_{j=1}^n (x_j-x_{j-1})\cdot\sqrt{1+(f'(\xi_j))^2}$$

podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě, kde $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$

$$\left(-11- \quad \exists \xi_j \quad f'(\xi_j) = \frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}} \right)$$

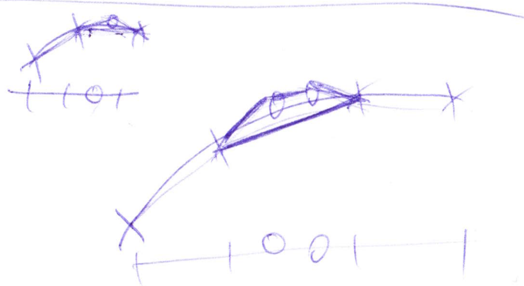
Odtud snadno odvodíme

$$s(g,D) \le L(f,D) \le S(\cancel{f}\, g,D) \qquad (+)$$

Tedy $\sup_D s(g,D) = \int_a^b g \le \sup_D L(f,D) = L(f)$

Sporem: nechť $L(f) > \int_a^b g(x)dx$. Tedy $\exists$ dělení D : $L(f,D) > \int_a^b g(x)dx$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ tak, že D_1 zjemňuje D, D_{n+1} zjemňuje D_n a $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) \to 0$. Pak $L(f,D) \le L(f,D_1) \le L(f,D_2) \le L(f,D_n)$



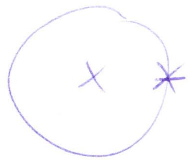
Z (+) $L(f,D_n) \le S(g,D_n)$, tedy $\underbrace{\lim_{n\to\infty} S(g,D_n)}_{= \int_a^b g} \ge L(f,D)$ ↯ □

$\boxed{\text{Věta BD 7.17}}$ (délka křivky v $\mathbb{R}^n$)

Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak

$$L(\varphi([a,b])) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(x))^2 + (\varphi_2'(x))^2 + \dots + (\varphi_n'(x))^2}\, dx$$

Příklad: délka kružnice



$$\varphi(t) = [\underbrace{\cos t}_{\varphi_1(t)}, \underbrace{\sin t}_{\varphi_2(t)}] \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$
$$[x, \sqrt{1-x^2}]$$
$$L = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x)\right)^2}\, dx$$

Poznámka: Stejná křivka může mít různé parametrizace.

Je vhodné ukázat, že délka křivky nezávisí na parametrizaci.

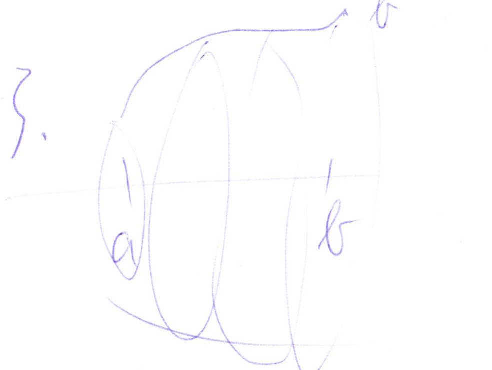
- Existuje spojitá funkce $f: [0,1] \to [0,1]^2$, která je na?

SPACE FILLING CURVES

Věta BD 7.78 (objem a povrch rotačního tělesa – bez důkazu) **16 – 5**

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná.

Označme $T = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b] \text{ a } \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\}$.

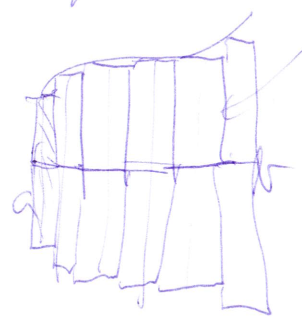


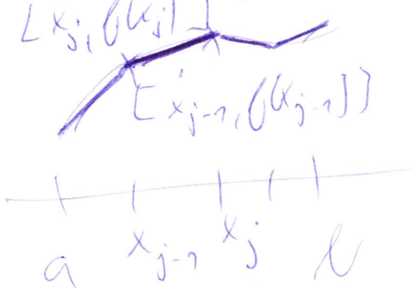
Pak $\text{Objem}(T) = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Je-li navíc f' spojitá na $[a,b]$, pak

$\text{Obsah povrchu}(T) = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Okecání:

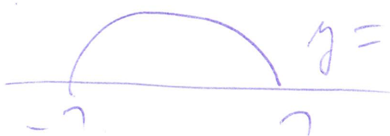




$$\int \doteq \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} \cdot 2\pi f(x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2} \cdot 2\pi f(x_j)$$

Příklad: Objem a povrch koule



$y = \sqrt{1-x^2} = f(x) \quad x \in [-1, 1]$

$B = \{ y^2 + z^2 \le 1 - x^2 = f^2(x)$

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi \cdot \left(2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right) = \frac{4}{3}\pi$$

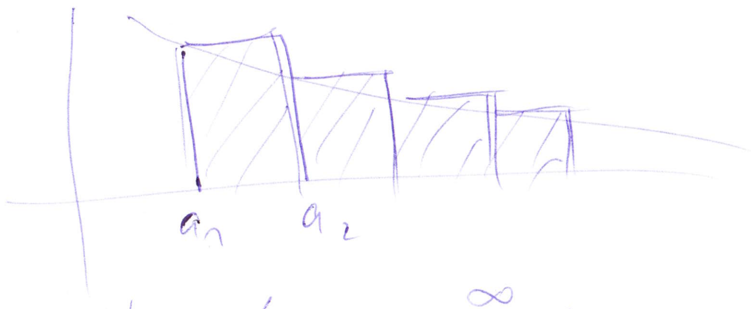
$$S = 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\right)^2}\,dx = 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$$

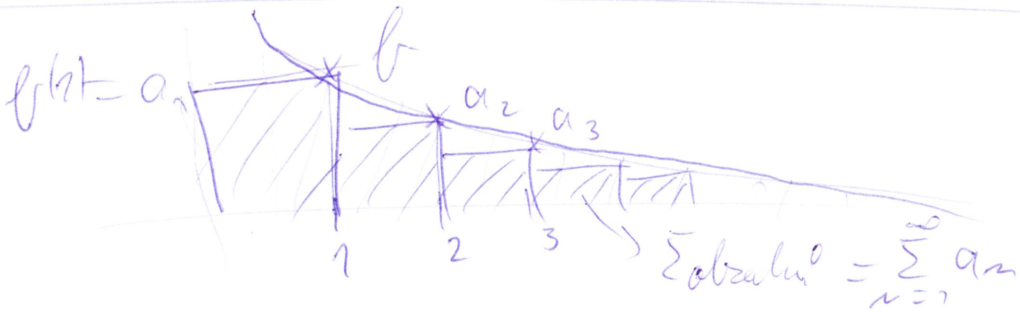
$$= 2\pi \cdot \int_{-1}^{1} \cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{\cancel{1-x^2}}}\,dx = 4\pi$$

Věta 7.19 (integrální kritérium konvergence řad)

Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na intervalu $[n_0 - 1, \infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost a_n platí $a_n = f(n)$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak

$$(N) \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$





Příklady: 1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ K $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ K $\iff \alpha > 1$

$\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{\infty}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \searrow \alpha > 0$ spojitá na $[1, \infty)$

2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \lg^\alpha x}\,dx$ K $\iff \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg^\alpha n}$ K $\iff \alpha > 1$

$\left[\frac{\lg^{\alpha+1} x}{\alpha+1}\right]_2^{\infty}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x \cdot \lg^\alpha x}$ spojitá $\searrow$ pro $x > 2$

$\alpha > 0$