15 - 1

$(N)\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ $\qquad f(x) = \sin x \qquad g = \frac{1}{x}$

- V 7.5 $\quad f$ spojitá na $[a,b] \Rightarrow f$ je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in [a,b]: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

- Abelova parciální sumace $\qquad m < n \qquad s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n .$$

Lemma (odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)
Nechť $a,b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$ a $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Pak

$$g(a) \cdot \inf_{x \in [a,b]} \int_a^x f(t)\,dt \le \int_a^b f(t) g(t)\,dt \le g(a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x f(t)\,dt .$$

Speciálně platí $\left| \int_a^b f(t) g(t)\,dt \right| \le g(a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x f(t)\,dt \right| .$

$\int_a^b f(t) g(t)\,dt > 0 \Rightarrow$

$\int_a^b f(t) g(t)\,dt < 0 \Rightarrow \inf < 0 \qquad \left| \int_a^b f(t) g(t)\,dt \right| \le g(a) \cdot -\inf_{x \in [a,b]} \int_a^x f(t)\,dt$

$\sup_{} -\int_a^x f(t)\,dt$
$\parallel$

15 - 2

Dk: Dokážeme druhou nerovnost (první je pak analogicky)

Nechť $\varepsilon > 0$. Z V 7.5 plyne stejnoměrná spojitost f a $f \cdot g$ na $[a,b]$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [a,b]: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ a $|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| < \varepsilon$ (*)

Označme $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Pak $F(a) = 0$

Zvolme dělení D intervalu $[a,b]$ s normou $< \delta$ $\quad D = \{x_i\}_{i=0}^n$

Z (*) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ \forall t \in [x_{i-1}, x_i]: f(t) \geq f(x_{i-1}) - \varepsilon$. $\quad / \int_{x_{i-1}}^{x_i} dt$

Tedy $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \geq f(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1})$ *

Analogicky z (*) $\forall t$: $f(t) \cdot g(t) \leq f(x_{i-1}) \cdot g(x_{i-1}) + \varepsilon$ dostaneme

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) g(t)\,dt \leq f(x_{i-1}) \cdot g(x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\overset{*}{\leq} g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) \right) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1})$$

(g nerostoucí) $$\leq g(x_{i-1}) \cdot \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \right) + \underbrace{g(a) \cdot \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1}) + \varepsilon \cdot (x_i - x_{i-1})}_{\varepsilon_i}$$ (*)

Označme $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \cdot (g(a) + 1) \cdot (b - a)$

Nyní $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,g(t)\,dt$

$$\le \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} g(a)\cdot\varepsilon\cdot(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon\cdot(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt + \underbrace{\varepsilon\cdot(g(a)+1)\cdot(b-a)}_{\tilde{\varepsilon}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{g(x_{i-1})}_{b_i}\cdot\underbrace{\left(F(x_i) - F(x_{i-1})\right)}_{a_i} + \tilde{\varepsilon}$$ (Abelova parciální sumace)

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)\cdot\left(\underbrace{g(x_{i-1}) - g(x_i)}_{\ge 0}\right) + \underbrace{g(x_{n-1})}_{\ge 0}\cdot F(x_n) + \tilde{\varepsilon}$$

$$\boxed{s_i = \sum_{j=1}^{\overset{n-1}{i}} \left(F(x_j) - F(x_{j-1})\right) = F(x_i) - \overset{0}{F(a)}}$$

$$\le \sup_{t\in[a,b]} F(t)\cdot\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\left(g(x_{i-1}) - g(x_i)\right)}_{g(a)-g(x_{n-1})} + g(x_{n-1})\right) + \tilde{\varepsilon}$$

$$= g(a)\cdot\sup_{t\in[a,b)} F(t) + \varepsilon\cdot(g(a)+1)\cdot(b-a)$$

Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tedy platí požadovaná nerovnost $\square$

$\boxed{\text{Věta T 7.14}}$ (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu) 15-4

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k f na (a,b). Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí

(A) Je-li $f \in N(a,b)$ a g je omezená, pak $f \cdot g \in N(a,b)$.

(D) Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x \to b-} g(x) = 0$, pak $f \cdot g \in N(a,b)$

Dk: $f \cdot g$ spojitá na (a,b) $\Rightarrow$ $\exists$ primit fce H.

BÚNO je g nerostoucí. Jinak vezmeme $-g$ a konvergence $\int fg$ se nezmění.

(A) BÚNO $g \geq 0$: víme g omezená $\exists K > 0$ $\forall x \in [a,b) : |g(x)| < K$

Vezmeme funkci $g(x) + K \geq 0$. Pak

$$\underbrace{\int_a^b f(x) g(x)\, dx}_{\in \mathbb{R}} \Leftarrow \underbrace{\int_a^b f(x) \cdot (g(x) + K)\, dx}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\in \mathbb{R}} \quad f \in N(a,b)$$

$g \geq 0$ omezená $\exists C > 0 \quad \forall x \in [a,b) \cdot 0 \leq g(x) < C$

$f \in N(a,b) \Rightarrow \lim_{x \to b-} F(x) \in \mathbb{R}$.

nechť $\varepsilon > 0$. Z Bolzano-Cauchyovy podmínky pro limitu funkce

k tomuto $\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in P_-(b, \delta): \ -\varepsilon < F(x) - F(y) < \varepsilon$

nechť $x, y \in P_-(b, \delta)$, podle Lemmatu ~~$(b-\delta, b)$~~

$$H(y) - H(x) = \int_x^y f(t) g(t)\, dt \leq g(x) \cdot \sup_{z \in [x,y]} \int_x^z f(t)\, dt =$$

$$= g(x) \cdot \sup_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \leq g(x) \cdot \varepsilon \leq C \cdot \varepsilon$$

a analogicky

$$H(y) - H(x) = \int_x^y f(t) g(t)\, dt \geq g(x) \cdot \inf_{z \in [x,y]} \int_x^z f(t)\, dt \geq$$

$$\geq g(x) \cdot \inf_{z \in [x,y]} (F(z) - F(x)) \geq -g(x) \cdot \varepsilon \geq -C\varepsilon.$$

Tedy $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in P_-(b, \delta): \ |H(x) - H(y)| < C \cdot \varepsilon$

Podle BC podmínky pro limitu funkce $\exists \lim_{x \to b-} H(x) \in \mathbb{R}$.

+ nechť $c \in (a,b)$. $f \cdot g$ spojitá na $[a,c] \Rightarrow f_g \in N(a,c)$.

H spojitá v $c \Rightarrow \exists \lim_{x \to c-} H(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow g \cdot f \in N(c,b)$

$\} \ g \cdot f \in N(a,b)$

(D) Víme g nerostoucí a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0 \implies g \geq 0$. $\boxed{15-6}$

$F(x)$ omezená $\exists K>0\ \forall x\in(a,b): |F(x)| \leq K$. Nechť $\varepsilon>0$

~~Z $\lim_{x\to b-} g(x)=0$~~ z $\lim_{x\to b-} g(x)=0$ $\exists \delta>0\ \forall x\in P_-(b,\delta): |g(x)|<\varepsilon$

Nyní $\forall x, y \in P_-(b,\delta)$, $x<y$ platí:

$$H(y)-H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\,dt \quad (\Leftarrow \text{lemma})$$

$$\leq g(x)\cdot \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,dt = g(x)\cdot \sup_{z\in[x,y]} (F(z)-F(x))$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sup_{z\in[x,y]} |F(z)-F(x)| \leq \varepsilon\cdot 2K$$

a ~~ze~~ analogicky

$$H(y)-H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\,dt$$

$$\geq g(x)\cdot \inf_{z\in[x,y]} (F(z)-F(x))$$

$$\geq -2K\varepsilon$$

Tedy $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in P_-(b,\delta): |H(y)-H(x)| \leq 2K\varepsilon$

Tedy H splňuje B(podmínku a $\implies \lim_{x\to b-} H(x) \in \mathbb{R}$

$\implies$ ~~$\exists$~~ $f\cdot g \in N(a,b)$ $\square$