Algebra — cvičení 5

Ozvěny minulého týdne

1. V $\mathbb{Z}$ řešte soustavu kongruencí: $4^y \equiv 1 \pmod 7$, $\quad 4y \equiv 3 \pmod 7$.

2. Dokažte, že v $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ jsou $2, \sqrt{13}+3, \sqrt{13}-3$ po dvou neasociované ireducibilní prvky.

Standardní příklady

3. Nalezněte v $\mathbb{Z}[i]$ NSD čísel a) $3+i, 4+2i$; b) $3+6i, 12-3i$; c) $5+3i, 13+18i$.

4. Najděte $a \in \mathbb{N}$ tak, aby ideál $a\mathbb{Z}$ byl roven: a) $28\mathbb{Z}+63\mathbb{Z}$; b) $15\mathbb{Z}+18\mathbb{Z}+40\mathbb{Z}$; c) $(-28)\mathbb{Z} \cap (-63)\mathbb{Z}$.

5. Nechť $R = \mathbb{Z}[i]$. Najděte $a \in R$ takové, že $aR = (5+3i)R \cap (13+18i)R$.

6. Vysvětlete následující „rozpor“:

(a) V oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ platí $(-2)2 = (i\sqrt{3}+1)(i\sqrt{3}-1)$, a proto se nejedná o obor s jednoznačným rozkladem (tj. Gaussův obor).

(b) V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí $\sqrt{2}\sqrt{2} = (-4+3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})$, a přesto se jedná o obor s jednoznačným rozkladem.

7. Nechť $S = \mathbb{Z}[x]$. Uvažujme ideály $I = 2S + xS$ a $J = 3S + xS$. Ukažte, že množina $\{ab; a \in I, b \in J\}$ netvoří ideál v okruhu S. Dokažte také, že I, J nejsou hlavní ideály.

Extra úlohy

8.* Ať R je obor hlavních ideálů. Dokažte, že pro zadaná $a, b \in R$ je $aR \cap bR = cR$, kde $c =$NSN(a, b).

9.* Buď s přirozené číslo takové, že $\sqrt{s} \notin \mathbb{N}$.

(1) Předpokládejme, že máme k dispozici $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ taková, že $a + b\sqrt{s}$ je invertibilní prvek v $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$. Ukažte, že je potom množina invertibilních prvků oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ nekonečná. (Využijte vhodnou vlastnost normy ν.)

(2) Nalezněte dvojici (a, b) hodící se do bodu (1) pro $s = 7$.

10.* Buď $R = \{f \in \mathbb{Q}[x];\ f(0) \in \mathbb{Z}\}$. Pak je R podokruh oboru $\mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že pro libovolné $f, g \in R$ existuje NSD(f, g). Proč není přesto R Gaussovým oborem?

11.* Rozložte polynom $2x^2 + 2x - 1$ nad eukleidovským oborem $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ na ireducibilní prvky.

12.* Najděte všechna řešení $u, v \in \mathbb{Z}$ rovnice $u^2 + 2209 = v^3$. (Nápověda: $2209 = 47^2$.)