$\int X \, dM$ $\quad$ M zprava spojitý $|M_v| < \infty$ $\quad$ $E|M_v| < \infty$ $\quad$ $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

X proces $\mathcal{F}_t$-predikovatelný $\quad$ $E\int_0^T |X_s| \, d|M_v|(s) < \infty$

(postačující, když X je omezený)

Je-li M martingal, pak i integrál je martingal

Tvrzení 7: Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ zprava spojitá filtrace, X elementární integrand, M martingal (zprava spojitý), $|M_v| < \infty$ $E|M_v| < \infty$ $M_0 = 0$. Pak $\int X \, dM = \left(\int_0^t X \, dM, \ t \in [0,T] \right)$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Důkaz: 1) adaptovanost
2) konečná střední hodnota
3) martingalovní rovnost

X je elementární: stačí uvažovat

pouze $X = 1_A 1_{\{0\}}$ pro $A \in \mathcal{F}_0$

$X = 1_A 1_{(s,t]}$ $A \in \mathcal{F}_s$

$(s,t] \subset [0,T]$

$X = 1_A 1_{\{0\}}$ $\quad \int_0^t X\,dM = 1_A M_0 + 0 = 0 \quad \forall t$

$X = 1_A 1_{(s,t]}$ $\quad \underbrace{\int_0^u X\,dM}_{N_u} = \int X 1_{[0,u]}\,dM = \begin{cases} \underline{1_A}_{\mathcal{F}_s} (\underset{\mathcal{F}_t}{M_t} - \underset{\mathcal{F}_s}{M_s}) & u \geq t \quad \mathcal{F}_u\text{-měř.} \\ \underline{1_A}_{\mathcal{F}_s} (M_u - M_s) & s < u < t \quad \mathcal{F}_u\text{-měř.} \\ 0 & u \leq s \quad \mathcal{F}_u\text{-měř.} \end{cases}$

N_u je $\mathcal{F}_u$-měřit. n. vel. $\forall u$

$$E|N_u| = E\,\cancel{1_A}\,|M_t - M_s| \quad \text{pokud } u \geq t \qquad \leq E|M_t - M_s|$$

$$E\,\cancel{1_A}\,|M_u - M_s| \quad s < u < t \qquad \leq E|M_t| + E|M_s| < \infty$$

$$E(N_u \mid \mathcal{F}_v) = N_v \quad \text{s.j.} \qquad E\left(1_A(M_{t\wedge u} - M_{s\wedge u}) \mid \mathcal{F}_v\right)$$

$$v < u$$

a) $u \leq s \quad E[0 \mid \mathcal{F}_v] = 0$

$$N_u = 1_A(M_{t\wedge u} - M_{s\wedge u})$$

$$= 1_A\underbrace{(M_{t\wedge v} - M_{s\wedge v})}_{=0}$$

b) $u \in (s, t]$

$u \in (s,t]$

$$E\left[1_A (M_u - M_s) \mid \mathcal{F}_v\right] \begin{cases} v \geq s & 1_A\left(E(M_u \mid \mathcal{F}_v) - M_s\right) = \\ & = 1_A (M_v - M_s) = 1_A (M_{v \wedge t} - M_{v \wedge s}) \\ & \text{“} N_v \\ v < s & \end{cases}$$

$$E\left[1_A E\left(1_A (M_u - M_s) \mid \mathcal{F}_s\right) \mid \mathcal{F}_v\right] = 0$$

$$E(M_u - M_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$$

$$= 1_A \left(M_{\underbrace{t \wedge v}_{v}} - M_{\underbrace{s \wedge v}_{v}} \right) = N_v$$

$u > t$ $\quad E\left[1_A (M_t - M_s) \mid \mathcal{F}_v\right]$ stejně jako výše $= N_v$

Věta 8: Buď M martingal jako v tvrzení 7 a X buď omezený $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces. Pak $\int X\,dM$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Důkaz: $\mathcal{S}$ systém prediktabilních obdélníků

$A\times\{0\} \quad A\in\mathcal{F}_0 \qquad \subset \Omega\times[0,T]$

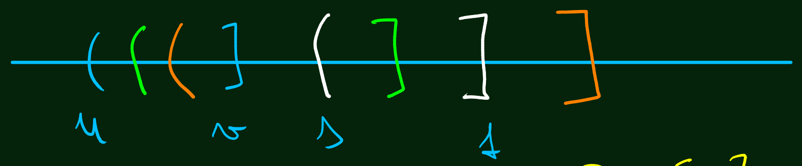
$A\times(s,t] \quad A\in\mathcal{F}_s$

$\mathcal{S}$ je uzavřený na konečné průniky

$$(A\times\{0\})\cap(B\times\{0\}) = \underbrace{(A\cap B)}_{\in\mathcal{F}_0}\times\{0\}$$

$$A\times\{0\}\cap B\times(s,t] = \emptyset$$

$$(A\times(s,t])\cap(B\times(u,v]) \quad \begin{cases} \emptyset \\ \underbrace{A\cap B}_{\in\mathcal{F}_s}\times(s,v] \\ \underbrace{A\cap B}_{\in\mathcal{F}_s}\times(s,t] \end{cases}$$



$\Omega\times(0,T] \qquad \Omega\times\{0\}$

$\mathcal{H}$ prostor procesů, pro které je $\int H\,dM$ $\mathcal{F}_s$-martingal

$1 \in \mathcal{H}$ $\quad \int 1\,dM = M$ je martingal

$1_S \in \mathcal{H}$ $\forall S \in \mathcal{S}$ podle tvrzení 7.

$H, G \in \mathcal{H}$ $\quad \int H+G\,dM = \int H\,dM + \int G\,dM$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad \int aH\,dM = a\int H\,dM$

$$E\left[\int_0^t H+G\,dM \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_0^t H\,dM \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right] + E\left[\int_0^t G\,dM \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right] =$$

$$= \int_0^s H\,dM + \int_0^s G\,dM = \int_0^s H+G\,dM$$

$\mathcal{H}$ je vektorovým prostorem funkcí $\Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$

Je $\mathcal{H}$ uzavřený na monotonní posloupnosti (omezených procesů?)

$0 \le H_n \nearrow H$ $\quad$ H omezený proces

$H_n \in \mathcal{H} \Rightarrow H \in \mathcal{H}$?? Potřebujeme ukázat, že $\int H\,dM$ je martingal

$$\int_0^t H\,dM = \lim \int_0^t H_n\,dM$$

$\mathcal{F}_t$ měřitelné, $\int H\,dM$ je coby limita $\mathcal{F}_t$-adaptovaných také $\mathcal{F}_t$-adapt.

$$\| $$

$$\int_0^t \sup H_n\,dM = \int \lim_n H_n\,dM$$

$$E\left|\int_0^1 H\,dM\right| \le E\int_0^1 \underbrace{|H|}_{<\text{ konst.}}\,d|M_v| < \infty$$

$$E|M_v| < \infty$$

$$E\left[\int_0^t H\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \overset{\text{s.}?}{=} \int_0^s H\,dM \quad \forall\, 0 \le s < t \le T$$

$$E\left[\int_0^t H\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \underline{E}\left[\underline{\lim} \int_0^t H_n\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \underline{\lim}\ \underline{E}\left[\int_0^t H_n\,dM \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] =$$

$$= \lim \int_0^s H_n\,dM = \int_0^s H\,dM$$

$$\int_\Omega \underbrace{\left|\int_0^t H_n\,dM\right|}_{\le \int |H|\,d|M_v|} dP$$

Máme splněny předpoklady rozšiřovacích lemmat

$\mathcal{H}$ obsahuje všechny procesy (omezené) a měřitelné vůči $\underbrace{\sigma(\mathcal{Y})}_{\text{Prediktabilní } \sigma\text{-algebra}}$

$\mathcal{H}$ obsahuje všechny $\mathcal{F}_t$-prediktabilní omezené procesy $\boxed{1}$

$\int H \, dM$ je martingal

(lze rozšířit na $\mathcal{F}_t$-pred. splňující $E \int_0^T |H| \, d|M_v| < \infty$)