1.1.22. Dva dlouhé tenké vodiče, vložené rovnoběžně ve vzdálenosti *d* od sebe jsou nabity s lineární hustotou $+\lambda$ a $-\lambda$ (λ=konst.). Určete intenzitu pole ***E*** v bodě, který leží v rovině symetrie ve vzdálenosti *x* od roviny v níž leží vodiče.

Stále DÚ

S 1.1.12. Do homogenního elektrického pole o intenzitě $\boldsymbol{E} \equiv (0, 0, E_0)$ je vložen elementární dipól s momentem $\boldsymbol{p}$ majícím též směr osy z, $\boldsymbol{p} \equiv (0, 0, p_0)$.

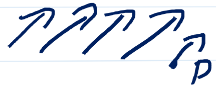
a) Dokažte, že ekvipotenciální plochou s nulovým potenciálem je kulová plocha a určete její poloměr a.
(Kde všude je potenciál nulový?)

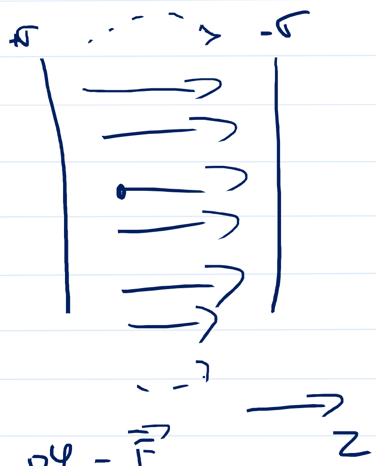
b) Změní se rozložení pole, jestliže do této ekvipotenciální plochy umístíme vodivou plochu nabitou na nulový potenciál?

c) Jaká by byla hustota náboje na této vodivé ploše?

d) Jaký by byl celkový dipólový moment P vodivé plochy?

b) - měření





všude konstantní

$\vec{E} = (0, 0, E_0)$

$\varphi = 0$

$\vec{p} = (0, 0, p_0)$

$\vec{r} = (x, y, z)$

$\varphi = 0$ - koule $\quad a = ?$

$-\nabla\varphi = \vec{E}$

$\Delta\varphi = 0$

$\varphi =$

superpozice polí

$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_0$

$$\varphi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}_{\text{pole dipólu}} - E_0 z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0 z}{r^3} - E_0 z$$

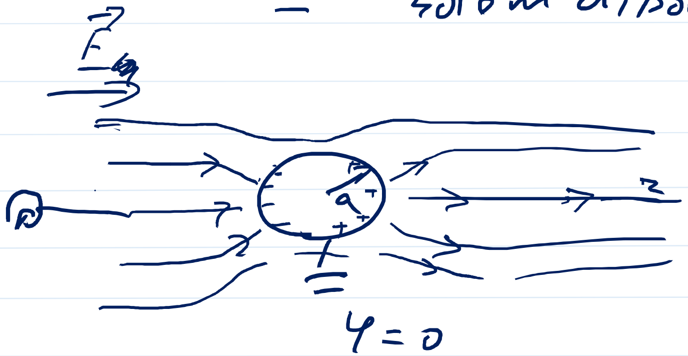
$\varphi = -E_0 z + C$

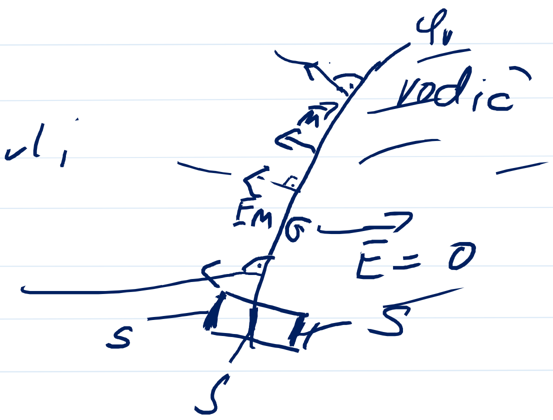
a)

$\varphi = 0$

$$\Rightarrow E_0 z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0 z}{r^3}$$

$\varphi = 0$ pro $r = \sqrt[3]{\dfrac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 E_0}} = a$ koule s poloměrem $\underline{a}$ kolem dipólu

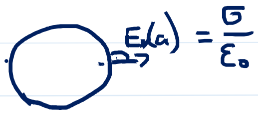


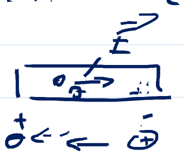


c) určit plošný na vložené kouli

z G.2 $\quad E_M = \vec{E}\cdot\vec{M}\, S = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

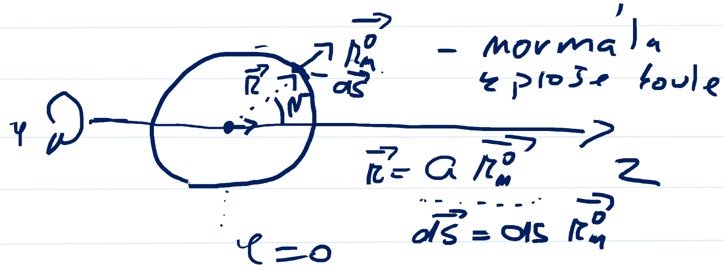
$\left|\vec{E}_v(\vec{r})\right|_{r=a} = E_v(a)$





$$E_v(a) = \left|\vec{E}(\vec{r})\right|_{r=a}$$ na kouli s pol $a = \left(\dfrac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$ $\qquad \vec{E}_H = (0, 0, E_0) = \vec{E}$

$$\vec{E}_v(\vec{r}) = \vec{E}_H + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(\frac{3\,\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^{2}}\,\vec{r} - \frac{\vec{p}}{\cancel{r^3}}\right)$$



$\vec{p}\cdot\vec{r} = p_0 a\cos\vartheta$

pro místa na kouli

$$\vec{E}_v(\vec{r})\Big|_{r=a} = \vec{E}_H + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\frac{4\pi\varepsilon_0 E_0}{p_0}}_{a^{-3}}\left(\frac{3\,p_0\,a\cos\vartheta}{a^2}\,a\,\vec{r}_n^0 - \vec{p}\right)$$

$$= \vec{E}_H + 3E_0\cos\vartheta\,\vec{r}_n^0 - \underbrace{\frac{\vec{p}}{p_0}E_0}_{\vec{E}_H} = \qquad\qquad \frac{\vec{p}}{p_0} = \frac{\vec{E}_H}{E_0}$$

$$\vec{E}_v(\vec{r})\Big|_{r=a} = 3E_0\cos\vartheta\,\vec{r}_n^0$$

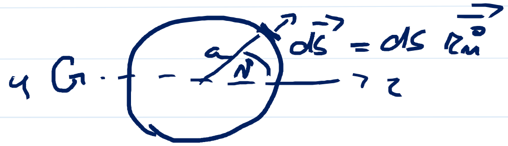
$$E_v(a) = \left|E_v(\vec{r})\right|_{r=a} = 3E_0\cos\vartheta = \frac{\sigma(\vartheta)}{\varepsilon_0}$$

$$\underline{\underline{\sigma(\vartheta) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\vartheta}}$$ na kouli o pol. a pro $\varphi = 0$

d) Celkový dipólový moment vložené vodivé kulové plochy - rozl. náboje $\sigma(\vartheta) = 3E_0\varepsilon_0\cos\vartheta$

bodové náboje $Q_1 \dots Q_N$

$$\vec p = \int_{K;\,R=a} a\,\sigma\, d\vec S \qquad \vec p = \sum_{i=1}^{N} Q_i \vec R_i$$

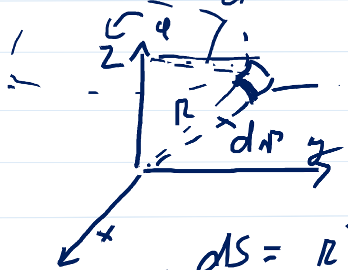


$d\vec S = dS\,\vec R_M^0$

$$= \int_K a\,3E_0\varepsilon_0 \cos\vartheta\, d\vec S = a\,3E_0\varepsilon_0 \int_K \cos\vartheta\, \vec R_M^0\, dS$$

sférické souř.

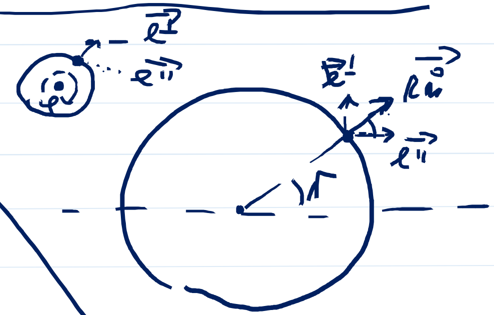
$dS =$



$R \sin\vartheta\, d\varphi$

$$dS = R^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= a\,3E_0\varepsilon_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\vartheta\, \vec R_M^0 \sin\vartheta\, a^2\, d\vartheta\, d\varphi =$$



$$= 3\varepsilon_0 E_0 a^3 \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\vartheta} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, \vec e_\parallel\, d\vartheta\, d\varphi + \iint \sin\vartheta\cos\vartheta\, \vec e_\perp\, d\vartheta\, d\varphi$$

nezávisí na φ — závisí na φ

$$= 3\varepsilon_0 E_0 a^3 \Big[\vec e_\parallel\, 2\pi \int_0^{\vartheta} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec e_\perp \int_0^{\vartheta} \dots\, d\vartheta\, d\varphi}_{0} =$$

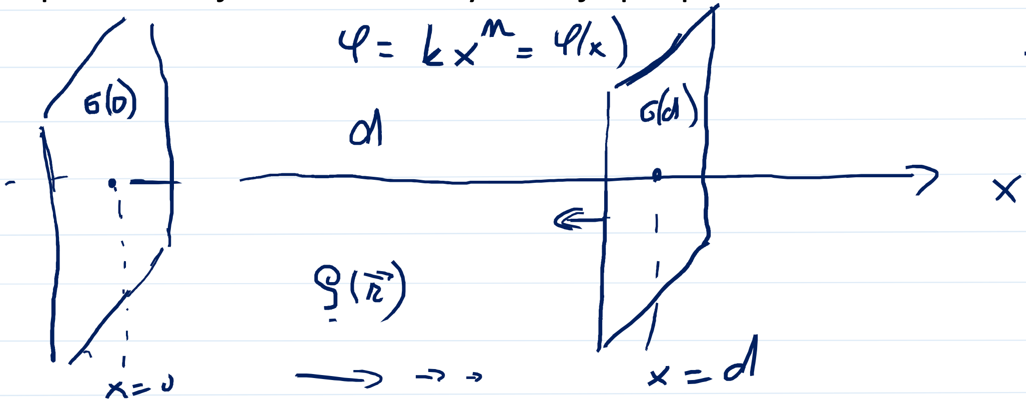
$$-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$= \vec e_\parallel\, 4\pi\varepsilon_0 E_0 a^3$$

$$\vec R_M^0 = (\cos\vartheta\, \vec e_\parallel + \sin\vartheta\, \vec e_\perp)$$

$$\int_0^{2\pi} \vec e_\perp\, d\varphi = 0$$

1.1.23. Mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami vzdálenými o d je průběh potenciálu dán vztahem $\varphi = kx^n$ (k a n > 1 jsou konstanty, *x* je vzdálenost od jedné z rovin).
Je třeba určit průběh objemové hustoty náboje ρ v prostoru mezi rovinami a plošnou hustotu σ náboje na vodivých rovinách.

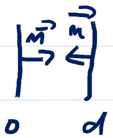


$$\Rightarrow \vec{E} = \left(-\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x},\ 0,\ 0\right)$$

$\rho = ?$ $\qquad \Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \Delta\varphi = k\dfrac{\partial^2 x^n}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = kn(n-1)\,x^{n-2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho = -\varepsilon_0 k n(n-1)\,x^{n-2}}$$

$\sigma - ?$ opět platí



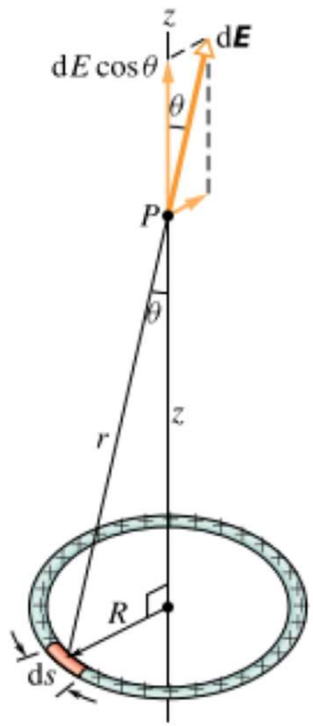
$$\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$x = 0 \qquad \sigma(0) = \varepsilon_0(\vec{E}\cdot\vec{n})\Big|_{x=0} = \varepsilon_0(E_x)\Big|_{x=0} = -\varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\varepsilon_0\ 0 = \cancel{0}$

$x = d \qquad \sigma(d) = \varepsilon(\vec{E}\cdot\vec{n})\Big|_{x=d} = \varepsilon_0(-E_x)\Big|_{x=d} = \varepsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=d} = \varepsilon_0\, k\, n\, x^{n-1}\Big|_{x=d} = \underline{\varepsilon_0 k n d^{n-1}}$

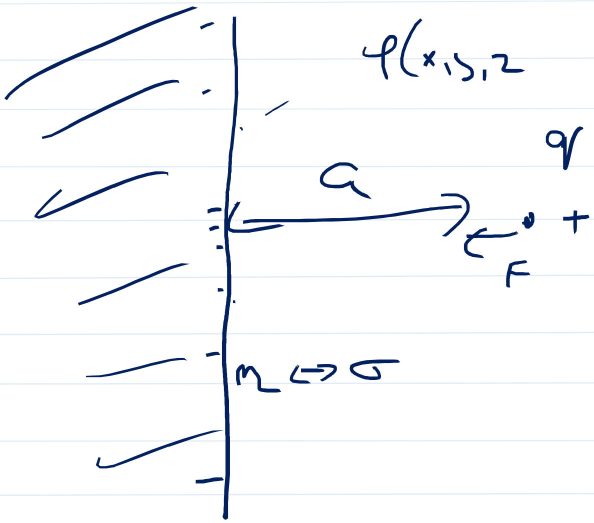
Tenký nevodivý prstenec o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě τ. Jaká je intenzita E elektrického pole v bodě P

DÚ



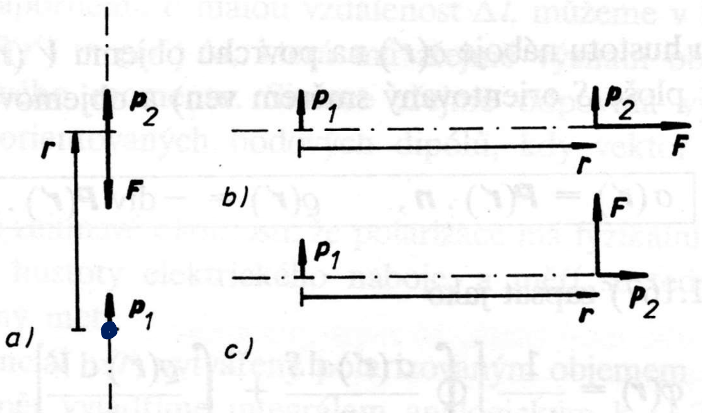
DÚ

S 1.1.14. Určete potenciál elektrostatického pole vzbuzeného bodovým nábojem *q* nacházejícím se ve vzdálenosti *a* od vodivé rovinné stěny udržované na nulovém potenciálu. Určete dále plošnou hustotu η náboje na vodivé stěně, jeho celkovou velikost a sílu *F*, kterou je náboj přitahován ke stěně.



Síla působící mezi dvěma dipóly

DÚ



Zvláštní případy vzájemné polohy dvou elektrických dipólů k určení jejich silového působení

$\vec{F}_2 = (\vec{p}_2 \cdot \nabla)\vec{E}_1$

v učebnici na str. 78

$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}_1\right)$

kap 1.3.5

$\vec{p}_1$ je v počátku