K DŮKAZU PICARDOVY VĚTY

(DR) $x' = f(t,x)$ f spoj. $\Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená

VĚTA (Picardova): Buď f lokálně lipschitzovská vzhledem k x, tj.

$$\forall (t,x)\in\Omega \quad \exists \delta>0,\ L\ge 0 \quad \|f(s,y)-f(s,z)\|\le L\|y-z\|$$
$$\forall (s,y),(s,z)\in B\big((t,x),\delta\big).$$

Pak pro každé $(t_0,x_0)\in\Omega$ existuje právě jedno maximální řešení x rovnice (DR), které splňuje $x(t_0)=x_0$.

---

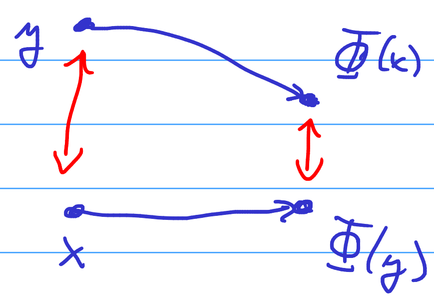
důkaz je založen na Banachově větě o kontrakci

VĚTA (Banachova): Buď M úplný metrický prostor s metrikou ρ a $\Phi: M\to M$ takové, že

$$\rho\big(\underbrace{\Phi(x),\Phi(y)}_{\text{kontrakce}}\big) < \varkappa\, \rho(x,y) \qquad \forall x,y\in M$$

a nějaké pevné $\varkappa<1$. Pak existuje právě jedno $x\in M$, že $\Phi(x)=x$.

x je pevný bod



k důkazu Banachovy věty: proč nemůžou ex. dvě takové x? SPOREM … kdyby

$\Phi(x)=x$, $\Phi(y)=y$ $\quad \rho(x,y) = \rho(\Phi(x),\Phi(y)) < \varkappa\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

$$x_1 \longrightarrow \Phi(x_1) =: x_2 \longrightarrow \Phi(x_2) =: x_3 \longrightarrow \Phi(x_3) =: x_4 \ \dots$$

$\rightsquigarrow$ tato posloupnost má limitu

$\dots \rightsquigarrow$ $\Rightarrow$ limita se musí zobrazit sama na sebe.

---

zpět k (DR) a důkazu PICARDOVY VĚTY

M... množina spojitých funkcí na $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ se supremovou metrikou, tj.

$$\varphi, \psi : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$$

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} \| \varphi(t) - \psi(t) \|$$

$\leftarrow$ toto je úplný metrický prostor

$$x' = f(t, x)$$

$$x'(t) = f(t, x(t)) \ \& \ x(t_0) = x_0 \qquad \Big/ \int_{t_0}^{s} dt$$

$$x(s) - \underbrace{x(t_0)}_{= x_0} = \int_{t_0}^{s} f(t, x(t))\, dt$$

její zderivováním dostaneme zpět (DR) + p.p.

$$x(s) = x_0 + \int_{t_0}^{s} f(t, x(t))\, dt$$

(integrální rovnice)

Vezmu zobrazení $\Phi : x \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{s} f(t, x(t))\, dt$

x … funkce z M

$x_0 + \int_{t_0}^{s} f(t, x(t))\, dt$ … funkce proměnné s, je spojitá

My bychom chtěli najít pevný bod zobrazení Φ

$x = \Phi(x)$ tj. $x(s) = [\Phi(x)](s) = x_0 + \int_{t_0}^{s} f(t, x(t))\, dt$

tj. pevný bod je řešením integrální rovnice po zderivování je to i řešení diferenciální rovnice.

Je Φ kontrakce?

$x, y \in M$

$$[\Phi(x)](s) - [\Phi(y)](s) = x_0 + \int_{t_0}^{s} f(t, x(t))\,dt - \left(x_0 + \int_{t_0}^{s} f(t, y(t))\,dt\right)$$

$$= \int_{t_0}^{s} f(t, x(t)) - f(t, y(t))\,dt$$

$$\|[\Phi(x)](s) - [\Phi(y)](s)\| = \left\| \int_{t_0}^{s} f(t, x(t)) - f(t, y(t))\,dt \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{s} \| f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \|\,dt \qquad s \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

$$\leq \int_{t_0}^{s} L \cdot \underbrace{\|x(t) - y(t)\|}_{\leq \sup_t \| \dots \| = \rho(x,y)}\,dt \leq \delta L \rho(x, y)$$

platí $\forall s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ na levé straně ... přejdu k supremu

$$\rho(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \delta L \rho(x, y)$$

stačí δ volit tak malé, aby $\underbrace{\delta \cdot L}_{=\varkappa} < 1$

$\Rightarrow \Phi$ je kontrakce

$\rightsquigarrow$ ukázal jsem řešení na malém intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$