ZÁKLADY TEORIE OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

$x' = f(t,x)$ Např. $x' = 2tx$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad \vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$$

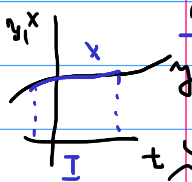
dále nebudu psát šipky

$\boxed{(DR)\ \ x' = f(t,x)}$ $\boxed{\begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ otevřená} \\ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \end{array}}$

□ teorie pro soustavy 1. řádu, ale lze použít i na soustavy vyšších řádů.

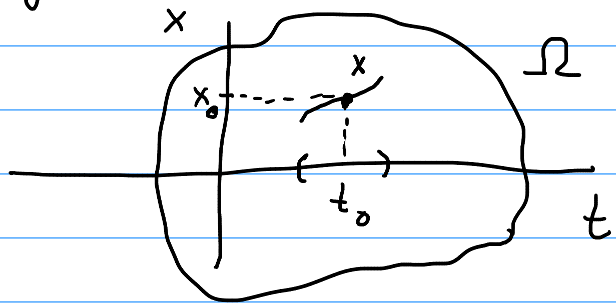
DEFINICE Řekneme, že funkce $x : I \to \mathbb{R}^n$, I otevřený interval, je <u>řešením</u> (DR), jestliže $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(t, x(t))$.

DEFINICE Mějme 2 řešení rovnice (DR) $x : I \to \mathbb{R}^n$ a $y : J \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že <u>y je prodloužením x</u>, jestliže $I \subset J$ a $x(t) = y(t)\ \forall t \in I$. Pak také <u>$x$ je zúžením y</u>.



Řekneme, že x je <u>maximální řešení</u>, jestliže x nemá žádné netriviální prodloužení.

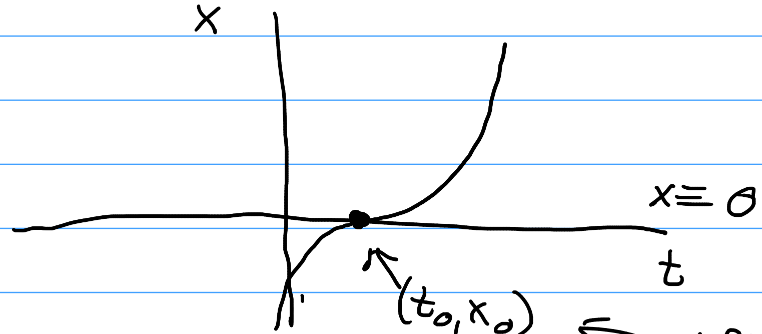
VĚTA (Peanova): Nechť $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Buď $(t_0, x_0) \in \Omega$. Pak existuje $\delta > 0$ a $x: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ taková, že x je řešením (DR) a splňuje $x(t_0) = x_0$.



VĚTA: Každé řešení lze prodloužit na maximální řešení.

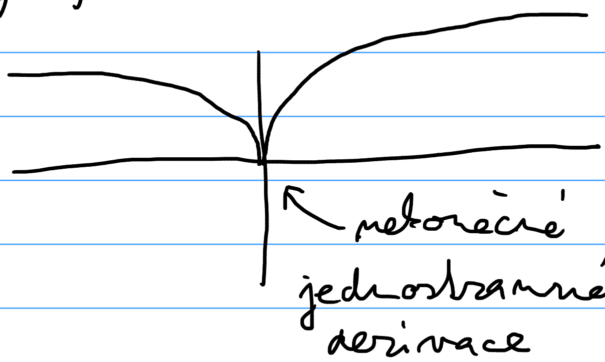
Pz: Peanova věta nedává jednoznačnost

$x' = \sqrt[3]{x^2}$



řešení nemusí být jediné

$g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

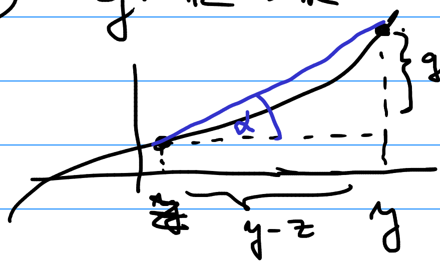


VĚTA (Picardova): Buď f lokálně lipschitzovská vzhledem k x, tj.

$$\forall (t,x)\in\Omega \quad \exists \delta>0,\ L\geq 0 \quad \|f(s,y)-f(s,z)\|\leq L\|y-z\|$$
$$\forall (s,y),(s,z)\in B((t,x),\delta).$$

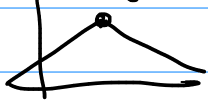
Pak pro každé $(t_0,x_0)\in\Omega$ existuje právě jedno maximální řešení x rovnice (DR), které splňuje $x(t_0)=x_0$.

Př. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad |g(y)-g(z)|\leq L|y-z|$,



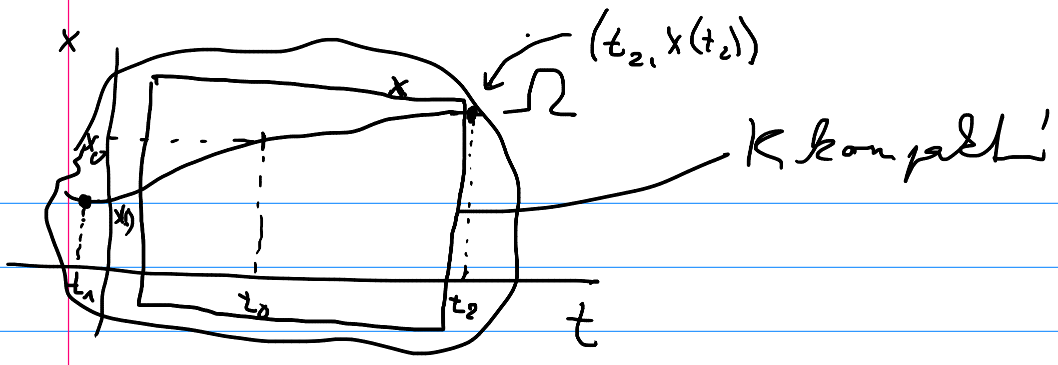
$$\left|\frac{g(y)-g(z)}{y-z}\right|\leq L$$
"$\operatorname{tg}\alpha$"

speciálně: je-li g' omezená, pak g je lipschitzovská

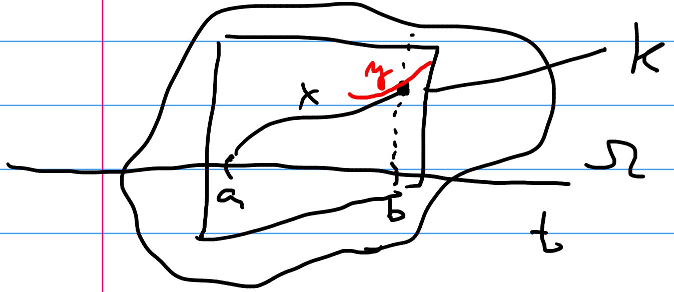


TVRZENÍ: Pokud $f\in C^1(\Omega)$, tj má spojité parciální derivace, pak je lokálně lipschitzovská vzhledem k x na Ω.

VĚTA (O opuštění kompaktu) Buď $x: I\to\mathbb{R}^n$ maximální řešení (DR) a $x(t_0)=x_0$. Buď $K\subset\Omega$ kompaktní, $(t_0,x_0)\in K$. Pak existují $t_1,t_2\in I$ taková, že $t_1<t_0<t_2$ a $(t_1,x(t_1))\notin K$ $(t_2,x(t_2))\notin K$.



myšlenka důkazu: kdyby $I = (a,b)$ (SPOREM)



f je na K omezená
$x' = f(t, x(t)) \Rightarrow x'(t)$ je omezená $\Rightarrow$ existuje limita

$\lim_{t \to b^-} x(t)$, označme ji x_1

Potom bod $(b, x_1) \in K \subset \Omega$ ... z Peanovy věty víme, že tímto bodem prochází nějaké řešení $y: (b-\delta, b+\delta)$

def $\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{na } (a,b) \\ y(t) & \text{na } (b, b+\delta) \end{cases}$

a ukážu, že $\tilde{x}$ je řešení (DR) na $(a, b+\delta)$ $\lightning$

to je spor s tím, že x bylo maximální řešení.