<u>Věta 6:</u> Buď Z $\mathcal{F}_t$-adaptovaný zprava spojitý proces s konečnou variací $|Z_v|$ a $E|Z_v| < \infty$

Buď X $\mathcal{F}_t$-prediktabilní, $\boxed{E\int_0^T |X|\, d|Z_v| < \infty}$

Pak $\int X\,dZ$ existuje a $\forall t \in [0,T]$ $\left(\int_0^t X\,dZ\right)(\omega) \overset{s.j.}{=} \int_0^t X(\omega)\,dZ(\omega)$

jestliže integrál vpravo existuje v Lebesgueově-Stieltjesově smyslu.

Tedy stačí, aby X byl omezený $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.

Důkaz: Věta zřejmě platí pro omezené elementární integrandy.

Omezený $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces X pro který máme $0 \leq X$ a $X^n \nearrow X$ pro nějakou posloupnost elementárních procesů X^n: $(|X^n| \leq X)$

$\mathcal{J}$ .. systém funkcí (procesů) pro které $\int X \, dZ$ existuje

$\Rightarrow$ omezené $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}$

$0 \le X^n \nearrow X$ $\qquad |X^n - X^m| \to 0$

$$E\left|\int X^n dZ - \int X^m dZ\right| \le E \int \underbrace{|X^n - X^m|}_{\text{omezené} \to 0} \underbrace{d|Z_v|}_{\text{má kon. variaci}} \longrightarrow 0$$

$\int X^n dZ$ je L_1 cauchyovská posloupnost $L_1(P)$ $\quad \exists$ limita v $L_1(P)$

$\int X dZ$

pro s.v. ω $\qquad \int X dZ = \lim \int X dZ$

$$\forall t \quad \underbrace{E\left|\int_0^t X^n\,dZ - \int_0^t X^m\,dZ\right|} \le E\int_0^t |X^n - X^m|\,d|Z_v| \le E\int_0^T |X^n - X^m|\,d|Z_v|$$

$$\to 0$$

$$\int X\,dZ = \left(\int_0^t X\,dZ,\ t \ge 0\right)$$

omezené

$$X_t^n(\omega) \nearrow X_t(\omega)$$

$$\left(\int_0^t X^n dZ\right)(\omega) \longrightarrow \left(\int_0^t X\,dZ\right)(\omega)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\int_0^t X^n(\omega)\,dZ(\omega) \xrightarrow[\text{Lebesgueova věta o mon. konv.}]{} \int_0^t X(\omega)\,dZ(\omega)$$

S.J.

$\mathcal{J}$ obsahuje 1, omezené elementární, $1_A \cdot 1_B = 1_{A\cap B}$

vektorový prostor, $\in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ $\in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

$\mathcal{J}$ obsahuje všechny omezené $\mathcal{F}_t$-predikovatelné procesy

Obecné $\mathcal{F}_t$-predikovatelné procesy

$$\int_0^T |X(u)|\, d|Zv|(u) < \infty \qquad Y^n = (X \wedge n) \vee (-n)$$

$$Y^n = X \cdot 1(|X| \leq n)$$

$$Y^n \to X$$

$E\int |X|\, d[Z]_v < \infty$ pak můžeme dokázat

$$\left(\int_0^t Y^n\, dZ\right)(\omega) \longrightarrow \left(\int_0^t X\, dZ\right)(\omega)$$

takto si označíme tento limitní proces

$$\begin{array}{ccc} \| \text{ s.j.} & & \| \text{ s.j.} \\ \int_0^t Y^n(\omega)\, dZ(\omega) & \xrightarrow{\text{Lem}} & \int_0^t X(\omega)\, dZ(\omega) \end{array}$$

$\mu_Z(a,b] = Z_b - Z_a$ je náhodná míra, která má konečnou úplnou variaci

$$\int X(\omega)\ dZ(\omega)$$

X $\mathcal{F}_t$-predikovatelný omezený

Z spojitá zprava $\mathcal{F}_t$ adaptovaný s konečnou úplnou variací

+ $E|Z_V| < \infty$

nebo $E\left(\int_0^T |X|\, d|Z_V|\right) < \infty$

$$\int X\,dZ = \left(\int_0^t X\,dZ,\ t \geq 0\right)$$

a $\int_0^t X\,dZ$ můžeme pro s.v. ω

interpretovat jako

$$\int_0^t X_s(\omega)\,dZ_s(\omega)$$