$\int X \, dZ$

$X \in \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$ $\quad X_t = \xi_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}$

$0 = t_0 = t_1 < t_2 < \dots t_N = T$

$\xi_i$ je $\mathcal{F}_{t_i}$ měřitelná náh. veličina s konečně mnoha hodn.

$Z$ zprava spojitý, adaptovaný

Tvrzení 3: s konečnou variací $|Z|_V(\omega) < \infty$, $E|Z|_V^p < \infty$ $\quad p \geq 1$

(pro nás je důležitý případ $p = 1$)

Tvrzení 5 martingal $EZ_T^2 < \infty$

1. ROZŠÍŘENÍ INTEGRÁLU

$$\int X \, dZ = \xi_0 Z_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})$$

$\mathcal{E}^{\uparrow}(\mathcal{F}_t)$ .. bodové limity neklesající posloupnosti elementárních procesů

$\mathcal{E}^{\uparrow}_{+}(\mathcal{F}_t)$ – nezáporné prvky $\mathcal{E}^{\uparrow}(\mathcal{F}_t)$

$H \in \mathcal{E}^{\uparrow}_{+}(\mathcal{F}_t)$ $\quad H \geq 0$, $\quad H_t(\omega) = \lim X^n_t(\omega)$ pro $\forall\, \omega, t$

$X^n$ je nějaká, neklesající posloupnost v $\mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$

$$X^n_t(\omega) \nearrow_{n \to \infty} H_t(\omega) \quad \forall\, t, \omega$$

$$\|H\|^*_{Z,p} = \sup\Big\{ \big(E\,\underbrace{\big|\textstyle\int X\,dZ\big|^p}\big)^{1/p},\ X \in \mathcal{E},\ |X| \le H \Big\}$$

náhodná veličina

tento integrál už máme definovaný

$Z$ je $L^p$-integrátor
$H \in \mathcal{E}_+^{\uparrow}(\mathcal{F}_t)$

$Y$ obecný měřitelný, $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

$$\|Y\|^*_{Z,p} = \inf\Big\{ \|H\|^*_{Z,p};\ H \in \mathcal{E}_+^{\uparrow}(\mathcal{F}_t),\ |Y| \le H \Big\}$$

$X \in \mathcal{E}$ $\qquad \|X\|^*_{Z,p} = \left(E\left|\int X\,dZ\right|^p\right)^{1/p}$

$\|\ \ \|^*_{Z,p}$ je vzdálenost měřitelných $\mathcal{F}_t$-adaptovaných procesů

Existuje-li posloupnost elementárních integrandů $X^n$

$\{X^n\} \subset \mathcal{E}(\mathcal{F}_t)$

taková, že $\|Y - X^n\|^*_{Z,p} \to 0$

$\|X^n - X^m\|^*_{Z,p} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$ cauchyovskost

$\left( E\left| \int X^n dZ - \int X^m dZ \right|^p \right)^{1/p} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

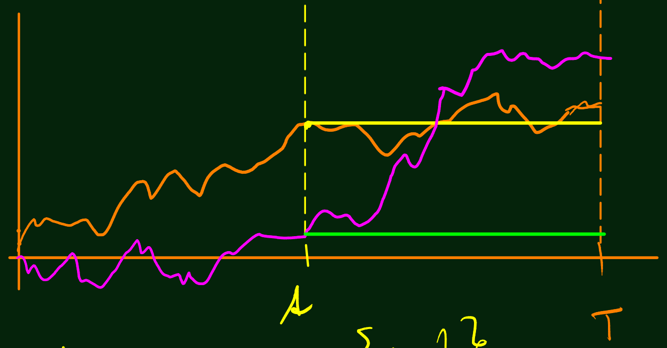
$\int X^n dZ$ je $L_p$-cauchyovská posloupnost náhodných veličin

$\exists$ limita v $L_p$ $\int Y dZ$

Speciálně budeme uvažovat $Y$ omezené + $Z$ podle typu 3 nebo 5

2. Stochastický integrál jako proces

$$\int X\,dZ = \xi_0 Z_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\right)$$




$$\int_0^t X\,dZ \qquad t\in[0,T]$$

Zastavíme $Z$

$t \wedge s = \min\{s,t\}$

$t$ pevné $\quad Z^t = \{Z_{t\wedge s},\ s\in[0,T]\}$

$Z$ je integrátor $\Rightarrow Z^t$ je také integrátor

$$\int X\,dZ^t = \xi_0 Z_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \underbrace{\left(Z_{t_{i+1}\wedge t} - Z_{t_i\wedge t}\right)}_{=0 \text{ pokud } t_i \ge t} = \int_0^t X\,dZ$$

$Z_t - Z_{t_i}$ pokud $t_i < t \le t_{i+1}$

$Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}$ pokud $t > t_{i+1}$

$$\int_0^t X\,dZ = \int X\,dZ^t$$

$\mathcal{F}_s$ - měřitelné

$$\int_0^t X\,dZ$$

$$\int X\,dZ^t = \xi_0 Z_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) + \xi_k (Z_t - Z_{t_k})$$

$t \in (t_k, t_{k+1}]$

rozstaníme-li v čase $s$

$t \in [0,T]$

$s < t$

$$\int_0^t X\,dZ = \int X\,dZ^t$$

$$\int X\,dZ^s = \xi_0 Z_0 + \sum_{i=1}^{l-1} \xi_i (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) + \xi_l (Z_s - Z_{t_l}) = \int_0^s X\,dZ$$

$s \in (t_l, t_{l+1}]$

$\mathcal{F}_{t_i} \in \mathcal{F}_s$ měřitelné

$\mathcal{F}_{t_l}$ - měřit. n. vel

$\left(\int_0^t X\,dZ,\ t \in [0,T]\right)$ $\quad$ $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces

$$\int X\,dZ = \left(\int_0^t X\,dZ,\ t \in [0,T]\right)$$

## Rozšiřovací lemmata

Lemma A1: Buď $E$ neprázdná množina, $\mathcal{Y}$ systém podmnožin na $E$ uzavřený na průniky. Buď $\mathcal{H}$ vektorový prostor funkcí na $E$

(1) $1_E \in \mathcal{H}$, $1_A \in \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{Y}$

(2) pro neklesající posloupnost $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$, $0 \le f_n$ $\quad$ $\sup f_n < \infty$ (neboli $\sup_n f_n < K$)

$\Rightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{H}$

podmínky na $\mathcal{H}$

Pak $\mathcal{H}$ obsahuje všechny $\sigma(\mathcal{I})$ měřitelné funkce (neboť všechny omezené $\sigma(\mathcal{I})$ měřitelné)

<u>Lemma A2:</u> Buď $V$ třída funkcí uzavřená na bodové limity posloupností. Nechť $V$ tvoří vektorový prostor a $1 \in V$. Nechť $\mathcal{M} \subset V$ je třída funkcí uzavřených na součin, pak $V$ obsahuje všechny funkce měřitelné vůči $\sigma$-algebře generované $\mathcal{M}$.