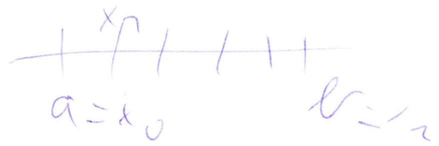
12-1

$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$

$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$

$s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f,D)$



Věta 7.4 f omez. $f \in R([a,b]) \iff$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ dělení D $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.

Věta 7.3 f omez na $[a,b]$. D_n posloupnost dělení $\nu(D_n) \to 0$

(a D_{n+1} je jemnější než D_n)

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

D_{n+1} jemnější D_n $S(f,D_n) \ge S(f,D_{n+1}) \ge s(f,D_{n+1}) \ge s(f,D_n)$

(V 7.1)

Věta T 7.8 (vlastnosti R integrálu)

a) Linearita: $f,g \in R([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g \in R([a,b])$, $\alpha f \in R([a,b])$ a

$(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g$ a $(R)\int_a^b \alpha \cdot f = \alpha \cdot (R)\int_a^b f$

b) Monotonie: $f,g \in R([a,b])$, $f \leq g$, pak $(R)\int_a^b f \leq (R)\int_a^b g$.

c) aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a<c<b$. Pak

$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c])$ a $f \in R([c,b])$

a platí $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx$

a)

c)

Dk: a) $f,g \in R([a,b]) \Rightarrow f$ a g jsou omezené na $[a,b]$

$\Rightarrow f+g$ je omezená a $\alpha \cdot f$ je omezená na $[a,b]$.

Je-li $I \subset [a,b]$ interval, pak

$$\sup_I (f+g) \le \sup_I f + \sup_I g \quad \text{i} \quad \inf_I (f+g) \ge \inf_I f + \inf_I g$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ platí

$$s(f,D) + s(g,D) \le s(f+g,D) \le S(f+g,D) \le S(f,D) + S(g,D) \quad (*)$$

$$s(f,D) = \sum \inf_{I_i} f \cdot |I_i|, \quad s(f+g,D) = \sum \inf_{I_i} (f+g) \cdot |I_i|, \quad S(f,D) = \sum \sup_{I_i} (f) \cdot |I_i|$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ tak, že $\nu(D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

~~Pak podle V~~ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Podle V 7.3

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) + S(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx$$

a $$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) + s(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx$$

Toto spolu s (*) dá

$$\lim_{n\to\infty} s(f+g,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f+g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx + (R)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Z Věty 7.3. plyne $f+g \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g$.

Je-li $f \in R([a,b])$, $\alpha \geq 0$, je $\alpha \cdot f$ omezená na $[a,b]$.

Pro každý interval $I \subset [a,b]$

$$\sup_I \alpha \cdot f = \alpha \cdot \sup_I f, \quad \inf_I \alpha f = \alpha \cdot \inf_I f$$

$\Rightarrow$ ~~$S(\alpha f) = \alpha$~~ $S(\alpha f, D) = \alpha \cdot S(f, D)$, $s(\alpha \cdot f, D) = \alpha \cdot s(f, D)$.

Nechť $\langle D_n \rangle$ je posloupnost dělení $[a,b]$, že $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak podle V 7.3

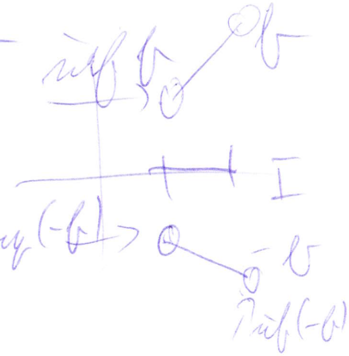
$$\lim_{n\to\infty} S(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot S(f, D_n) = \cancel{\lim_{n\to\infty}} \alpha \cdot (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

a $$\lim_{n\to\infty} s(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot s(f, D_n) = \alpha \cdot (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

$\Rightarrow$ Podle V 7.3 pro αf: $\alpha f \in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b \alpha f = \alpha \cdot (R)\int_a^b f$.

Zbývá $\alpha < 0$. Stačí pro $\alpha = -1$. Pak $\forall$ interval I

$$\sup_I (-f) = -\inf_I f \quad \text{a} \quad \inf_I (-f) = -\sup_I f$$



Tedy $\forall$ posloupnost dělení $\langle D_n \rangle$ s $\nu(D_n) \to 0$ a D_{n+1} jemnější než D_n:

$$\lim_{n\to\infty} S(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -s(f, D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} s(-f, D_n) = \lim_{n\to\infty} -S(f, D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,dx$$

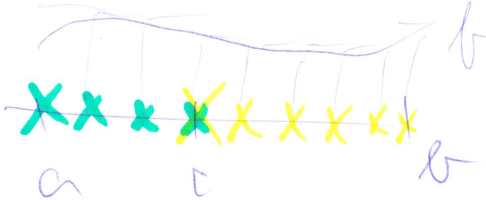
$\Rightarrow$ $-f \in R([a,b])$, $(R)\int (-f) = -(R)\int_a^b f$

b) Nechť D_n je posloupnost dělení, $\nu(D_n)\to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak $\sup_I f \le \sup_I g$. Tedy

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) \le \lim_{n\to\infty} S(g,D_n) = (R)\int_a^b g(x)\,dx$$

c) Nechť $\{D_n^1\}$ a $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení $[a,c]$ respektive $[c,b]$ splňující $\nu(D_n^1)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\nu(D_n^2)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ a D_{n+1}^1 je jemnější než D_n^1 a D_{n+1}^2 je jemnější než D_n^2.

Nechť $D_n = D_n^1 \cup D_n^2$. Pak D_n je dělení $[a,b]$ a $\nu(D_n)\to 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n.



Nechť $f\in R([a,c])$ a $f\in R([c,b])$. Pak podle V 7.3

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n^1) = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n^1) = (R)\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n^2) = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n^2) = (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n^1) + S(f,D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n^1) + s(f,D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,dx + (R)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Podle V 7.3 $f\in R([a,b])$ a $(R)\int_a^b f = (R)\int_a^c f + (R)\int_c^b f\,dx$.

Nechť $f \in R([a,b])$. Pak

$$0 \le S(f,D_n^1) - s(f,D_n^1) \le$$
$$\le S(f,D_n^1) - s(f,D_n^1) + S(f,D_n^2) - s(f,D_n^2)$$
$$= S(f,D_n) - s(f,D_n) \xrightarrow[n\to\infty]{V\,7.3} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S(f,D_n^1) - s(f,D_n^1) = 0$$

$\Rightarrow f \in R([a,c])$. Analogicky $f \in R([c,b])$.

Rovnost $(R)\int_a^b f = (R)\int_a^c f + (R)\int_c^b f$ plyne z předchozí části důkazu. □

Úmluva: 1. Nechť $b < a$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Věta T 7.9 (o derivaci integrálu podle horní meze)

Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha,\beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod J. Definujme na J funkci $F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt$

Pak platí (i) F je spojitá na J

(ii) Je-li f spojitá v $x_0 \in J$, pak

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Důsledek: Je-li f spojitá na (a,b), pak má na (a,b) primit. fci. (V. 6.2).

Dk: $\forall \alpha,\beta \in J$. f spoj. na $[\alpha,\beta] \Rightarrow \exists (R)\int_\alpha^\beta f$. Podle (ii) je F primitivní k f na (a,b).

Důsledek: Nechť f je spojitá na $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$(R) \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta_-} F(x) - \lim_{x\to\alpha_+} F(x)$, kde F je primitivní funkce k f na (α, β).

Dk. Definujme
$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(\alpha) & \dots\ x \in [\alpha-1, \alpha] \\ f(x) & \dots\ x \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \dots\ x \in [\beta, \beta+1] \end{cases}$$
Pak $\tilde f$ je spojitá na $[\alpha-1, \beta+1]$

Označme $G(x) = G(\alpha) + (R)\int_\alpha^x \tilde f(t)\,dt$.

Pak G je primit. k $\tilde f$ (podle minulého důsledku) na $(\alpha-1, \beta+1)$

a $G(\beta) - G(\alpha) = (R)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$,

Nechť F je primitivní fce k f na (α, β), pak existuje $d \in \mathbb{R}$, že $F = G + d$ na (α, β) (V 6.1).

Pak $\lim_{x\to\alpha+} F(x) = \lim_{x\to\alpha+} G(x) + d = G(\alpha) + d$

$\lim_{x\to\beta_-} F(x) = \lim_{x\to\beta_-} G(x) + d = G(\beta) + d$

Tedy $\lim_{x\to\beta_-} F(x) - \lim_{x\to\alpha_+} F(x) = G(\beta) + d - (G(\alpha) + d) =$
$= G(\beta) - G(\alpha) = (R)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$.