$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_D S(f,D)$$

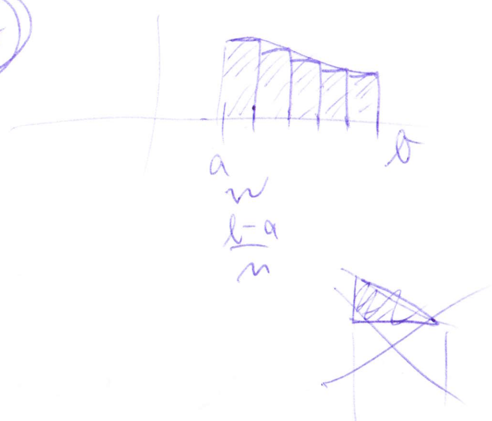
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_D s(f,D)$$

Věta 7.3 f omezená na $[a,b]$. D_n $\quad \nu(D_n) \to 0$.

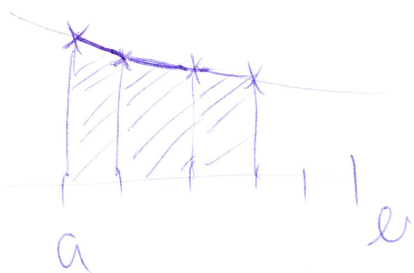
Pak $(R)\ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{n \in \mathbb{N}} S(f,D_n)$

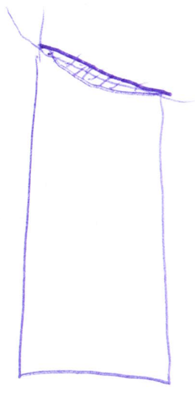
$(R)\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} s(f,D_n)$.

A

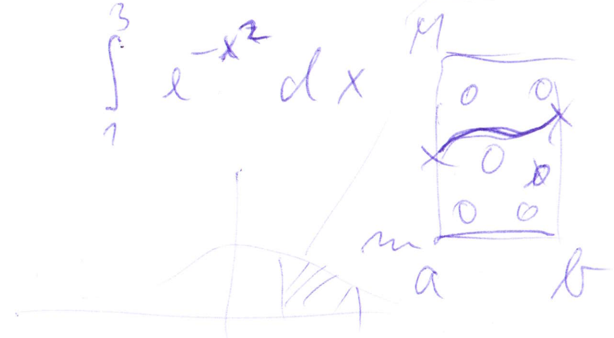


B





$$\int_1^3 e^{-x^2}\,dx$$



C MONTE CARLO

Věta [7.4] (kritérium existence R integrálu)

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists$ dělení D intervalu $[a,b]$, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Dk: "$\Rightarrow$" Zvolme libovolnou posloupnost dělení, že $\nu(D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

~~BÚNO~~ + navíc D_{n+1} je zjemnění D_n $\Rightarrow S(f,D_{n+1}) \le S(f,D_n)$, $s(f,D_{n+1}) \ge s(f,D_n)$

Pak $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n) = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx$

a $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,dx$. [V 7.1]

Tedy $\exists n_0\ \forall n \ge n_0 \quad S(f,D_n) - s(f,D_n) < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezneme D z předpokladu.

Pak

$$0 \le (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

viz Důsledek za V 7.2.

Toto platí $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$\square$

Definice Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in I: \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

__Poznámka:__ 1) spojitost a stejnoměrná spojitost se liší pořadím kvantifikátorů

__spojitost:__ $\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in I: \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$

__st. sp.:__ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in I: \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$

2) Když f je stejnoměrně spojitá na I, pak f je spojitá na I.

3) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na $(0,1)$, ale není tam stejnoměrně spojitá

$x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n+1}$, pak

$$|f(x) - f(y)| = |n - (n+1)| = 1$$

K $\varepsilon = 1$ nelze $\delta > 0$ pro st. spojitost

jinak $\exists n$ $\left|\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{x} - \underbrace{\tfrac{1}{n+1}}_{y}\right| < \delta$ a

$$|f(x) - f(y)| = 1 \not< 1 = \varepsilon$$

Věta [7.5] (o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti)
Nechť f je spojitá na omezeném ~~uz~~ uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

Dk: Sporem. Nechť f je spojitá na $[a,b]$, ale
$\exists \varepsilon > 0$ pro $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x_n, y_n \in [a,b]$: $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ & $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Interval $[a,b]$ je omezený, a proto lze z x_n vybrat konvergentní podposloupnost podle Weierstrassovy ~~věty~~ věty.
Tedy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Dále $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$, neboť
$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.
Nyní f je spojitá v x_0 (vzhledem k $[a,b]$).
Tedy k našemu $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tak, že
$\forall z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$: $|f(z) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
Nalezneme $k \in \mathbb{N}$, aby $x_{n_k}, y_{n_k} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\left(\text{z } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0\right)$
Nyní $\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| <$
$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ ↯

$\square$

Věta (Weierstrass) Z každé omezené posl lze vybrat konv. podposloupnost.

Věta L 7.6 (o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti)

Nechť f je ~~spojitá~~ spojitá na $[a,b]$, pak $f \in R([a,b])$.

Dk: Podle věty se Z S je f omezená na $[a,b]$. (o vztahu spojitosti a omezenosti)

Z věty 7.5 víme, že f je dokonce stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

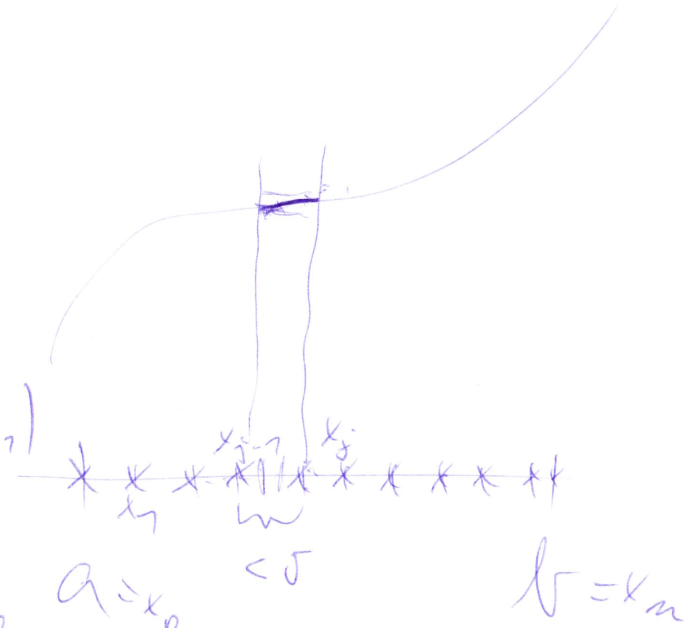
Nechť $\varepsilon > 0$. Pak

$\exists \delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in [a,b]: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Zvolme dělení D intervalu $[a,b]$ tak, že $\nu(D) = \min_{j=1,\dots,n}(x_j - x_{j-1}) < \delta$

Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$. Označme

$M_j = \sup_{[x_j, x_{j-1}]} f$, $m_j = \inf_{[x_j, x_{j-1}]} f$



Pak platí $M_j \leq m_j + \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, n$

Tedy

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon \cdot (b-a).$$

Podle V 7.4 je tedy $f \in R([a,b])$

$\square$

Věta L 7.7 (vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti) 11-6

Nechť f je (omezená) monotonní funkce na intervalu $[a,b]$.
Pak $f \in R([a,b])$.

Důkaz: BÚNO f je neklesající. Budeme používat ~~věty~~ větu 7.4.

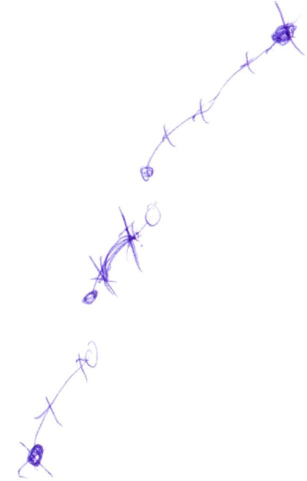
Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme ekvidistantní dělení $D = \{a + (b-a)\cdot \frac{j}{n}\}_{j=0}^{n}$

a volíme n, aby $n > \frac{1}{\varepsilon}\cdot(b-a)\cdot(f(b)-f(a))$.

Nyní

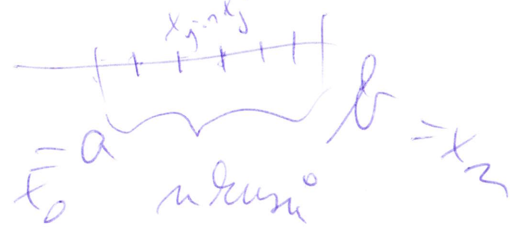
$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\cdot(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\cdot\frac{b-a}{n}$$



Odtud

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))\cdot\frac{b-a}{n} = \underbrace{(f(x_n) - f(x_0))}_{(f(b)-f(a))}\cdot\frac{b-a}{n} < \varepsilon$$



Podle V 7.4 $f \in R([a,b])$. $\square$