Ukázková řešení domácích cvičení úterní skupinka

1. Hodíme dvakrát kostkou. Označíme

- SD jev „součet hozených čísel je 10“,
- PS jev „první hod padla šestka“ a
- NS jev „v některém hodu padla šestka“ (možná v obou).

Spočtěte pravděpodobnosti daných jevů a všechny podmíněné pravděpodobnosti.

Řešení: $P(SD) = 3/36$ (tři možnosti z 36: 4+6, 5+5, 6+4)

$P(PS) = 1/6$

$P(NS) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$ (vzorec pro pravděpodobnost sjednocení, nebo přímo spočítáme dobré možnosti).

Pro podmíněné pravděpodobnosti máme dvě možnosti. Můžeme postupovat přímo podle definice:

$$P(SD \mid PS) = \frac{P(SD \cap PS)}{P(PS)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}.$$

Nebo si můžeme uvědomit, že podmiňování jevem PS nás umístí do menšího pravděpodobnostního prostoru, jehož prvky jsou jenom ty v PS, resp. jiné prvky mají nulovou pravděpodobnost. V tomto pravděpodobnostním prostoru je šest prvků (možností druhého hodu) a jen jeden (čtyřka) splní jev SD. Je tedy $P(SD \mid PS) = \frac{1}{6}$.

Obdobně můžeme spočítat $P(PS \mid NS) = \frac{6}{11}$ přímo (6 dobrých možností z 11 pro PS), nebo podrobněji

$$P(PS \mid NS) = \frac{P(PS \cap NS)}{P(NS)} = \frac{6/36}{11/36} = \frac{6}{11}.$$

Ostatní případy už uvedeme stručněji.

$P(NS \mid PS) = 1$	protože $NS \supseteq PS$.
$P(PS \mid SD) = 1/3$	protože $SD = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ a jen jeden z těchto prvků leží v PS.
$P(NS \mid SD) = 2/3$	protože $SD = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ a dva z těchto prvků leží v NS.
$P(SD \mid NS) = 2/11$	protože $\lvert NS\rvert = 11$ a $\lvert NS \cap SD\rvert = \lvert\{(4,6),(6,4)\}\rvert = 2$.

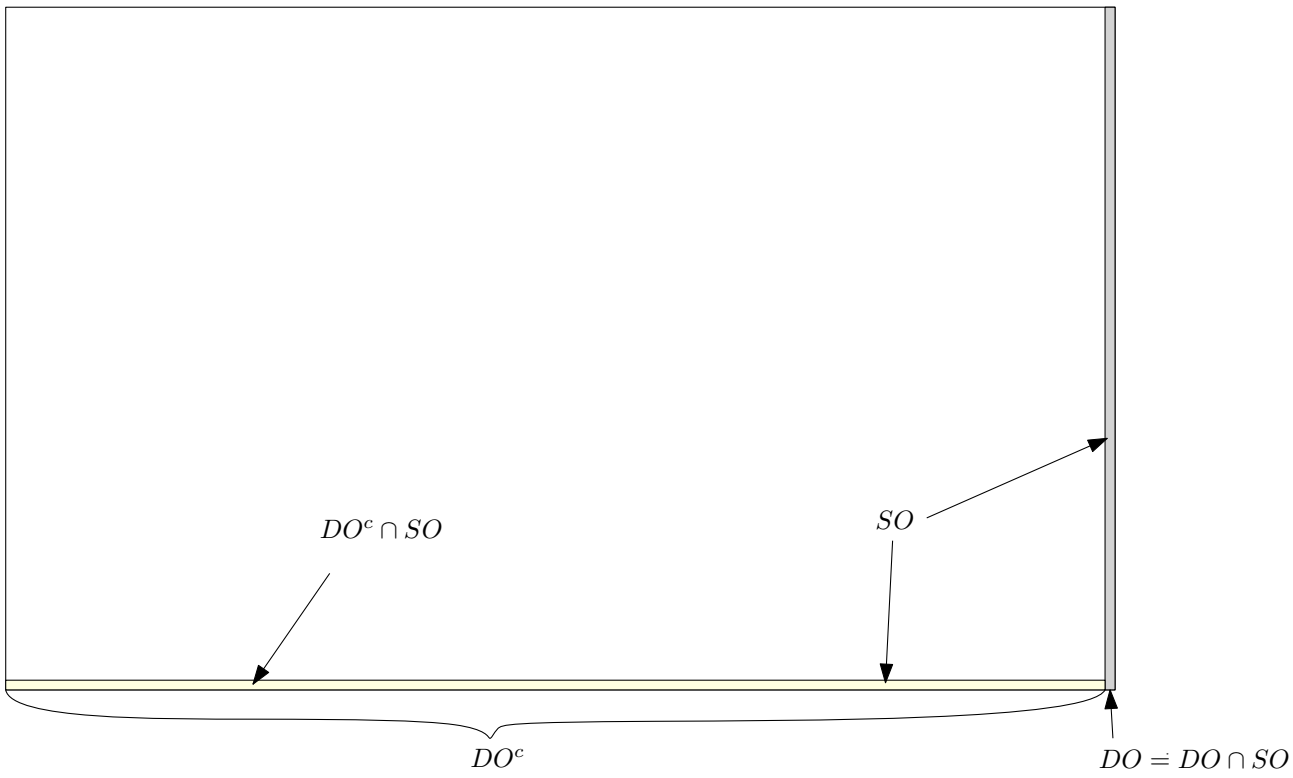
2. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

Řešení: Odhadem: šest orlů za sebou je dost malá pravděpodobnost. Na druhou stranu divná je jen jedna mince ze sta, takže by se tyhle dvě malé pravděpodobnosti mohly nějak „pokrátit“?

Tak teď pořádně: Označme DO jev „vytáhli jsme dvouorlovou minci“ a SO jev „šestkrát padl orel“. Podle Bayesovy věty

$$P(DO \mid SO) = \frac{P(DO)P(SO \mid DO)}{P(DO)P(SO \mid DO) + P(DO^c)P(SO \mid DO^c)} = \frac{\frac{1}{100} \cdot 1}{\frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{2^6}} = \frac{64}{163} \doteq 0.39.$$

A teď ještě obrázkem: na obdélníku níže je ilustruje pravý, šedivý kousek pravděpodobnost vytažení dvouorlové mince, v něm je 100%ní pravděpodobnost, že padne šest orlů. V levé části obdélníku (normální mince) je pravděpodobnost šesti orlů malá, $P(SO \mid DO^c) = 1/2^6$. Úloha po nás žádá zjistit, jak velká část z vybarvené části obdélníku je šedivá. Obrázek by měl být v měřítku, a i od oka je vidět, že je to „menší polovina“.



3. Na dvanáctistěnné kostce je jedna stěna označena jedničkou, dvě dvojkou, čtyři čtyřkou a pět pětkou, všechny stěny padají stejně často. Označíme X výsledek jednoho hodu. Spočítejte $\mathbb{E}(X)$ a $var(X)$, vyčíslete taky tzv. *směrodatnou odchylku*, která je definovaná jako $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$.

Řešení: Spočtěme napřed pravděpodobnosti jednotlivých hodů, neboli pravděpodobnostní funkci: $p_X(1) = 1/12$, $p_X(2) = 2/12$, $p_X(4) = 4/12$ a $p_X(5) = 5/12$. Pochopitelně $p_X(x) = 0$ pro všechna ostatní x. Pro kontrolu, $\sum_{x \in Im(X)} p_X(x) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = 1$.

Podle vzorce pro střední hodnotu je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot p_X(x) = 1 \cdot \tfrac{1}{12} + 2 \cdot \tfrac{2}{12} + 4 \cdot \tfrac{4}{12} + 5 \cdot \tfrac{5}{12} = \frac{46}{12} = \frac{23}{6} \doteq 3.83.$$

Numerický výsledek je dobrý pro představu a částečnou kontrolu – kdyby např. vyšlo méně než 3, nebo víc než 5, byl by výsledek určitě špatně. V dalším budeme ale počítat s přesnou hodnotou, abychom nezanášeli zbytečné numerické chyby.

Spočteme obdobně druhý moment:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in Im(X)} x^2 \cdot p_X(x) = 1^2 \cdot \tfrac{1}{12} + 2^2 \cdot \tfrac{2}{12} + 4^2 \cdot \tfrac{4}{12} + 5^2 \cdot \tfrac{5}{12} = \frac{198}{12} = \frac{33}{2} = 16.5.$$

(Kontrola odhadem: je to něco mezi 4^2 a 5^2, to by mohlo být dobře – má to být průměr z 1^2, 2^2, 4^2, 5^2, ovšem poslední dvě čísla mají nejvyšší váhu.)

Odsud už snadno podle vzorců rozptyl a směrodatnou odchylku.

$$var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{33}{2} - (\frac{23}{6})^2 = \frac{65}{36} \doteq 1.81$$
$$\sigma_X = \sqrt{var(X)} = \sqrt{65}/6 \doteq 1.34$$

Opět hrubá kontrola: od střední hodnoty je nejčastější hodnota, 5, vzdálena o 1.17, 4 jen o 0.17, ale 1 a 2 o „hodně“, takže odpověď může být správně: podle vzorce $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$ je vidět, že σ_X je někde mezi nejmenší a největší odchylkou od průměru.

Rozptyl šel počítat i podle definice ($\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$), ale počítání je méně příjemné.