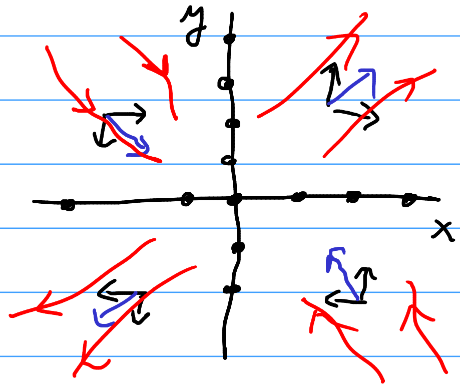
NELINEÁRNÍ SYSTÉMY

1. kvalitativní analýza
2. první integrál

Př:

$$x' = x^2 y$$
$$y' = x y^2$$



1. kval. analýza

$x = 0$ nebo $y = 0$

$\Rightarrow x' = y' = 0$

$x' > 0 \iff y > 0$

$y' > 0 \iff x > 0$

$x' = x^2 y$

$y' = x y^2$

výpočet 1. integrálu

$$x' \cdot x y^2 = y' x^2 y \qquad / : x^2 y, \; x, y \neq 0$$

$$x' y = y' x \qquad / : x y$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \qquad / \int dt$$

1. Integrál

$V : (x, y) \mapsto c$

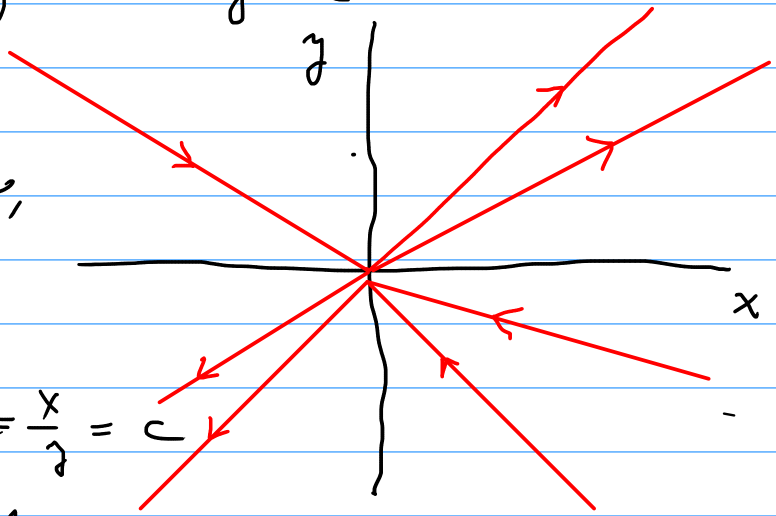
$$\ln|x| = \ln|y| + c$$

$$\underbrace{V(x,y) = \ln|x| - \ln|y|}_{\text{1. integrál}} = c$$

Jinak: $\ln \frac{|x|}{|y|} = c \qquad \frac{|x|}{|y|} = e^c = K$

v každém kvadrantu zvlášť $\quad \frac{x}{y} = \pm K$

$V(x,y) = \frac{x}{y}$ jiný 1. integrál



trajektorie řešení jsou množiny bodů, kde $V(x,y)$ je konstantní.

v našem případě $\cancel{y=}\ \frac{x}{y} = c$

$x = c\cdot y \qquad y = x\cdot\frac{1}{c}$

dopočítáme řešení soustavy:

$x = c\cdot y$

$y' = xy^2 = c\cdot y^3$

$\frac{y'}{y^3} = c \qquad / \int dt$

$\frac{1}{-2}y^{-2} = ct + d$

$y^{-2} = -2ct - 2d$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \pm\frac{1}{\sqrt{-2ct-2d}} \\ x(t) &= \pm\frac{c}{\sqrt{-2ct-2d}} \end{aligned}}$$

def. obor: $c > 0$ $\qquad -2ct - 2d > 0$

$2ct < -2d$

$t < \frac{-2d}{2c} = -\frac{d}{c}, \quad \underline{t \in (-\infty, -\frac{d}{c})}$

$c < 0 \qquad t > -\frac{d}{c} \qquad \underline{t \in (-\frac{d}{c}, +\infty)}.$

Úlohy na cvičení:

1. $x' = -y(1-x^2)$ $\quad$ pouze kvalitativní analýza
   $y' = x + y(1-x^2)$

2. $x' = xy^3$ $\quad$ kvalitativní analýza a 1. integrál
   $y' = xy + xy^2$

3. $x' = \frac{x^2}{y}$ $\quad$ vyřešit (pomocí 1. integrálu)
   $y' = x$