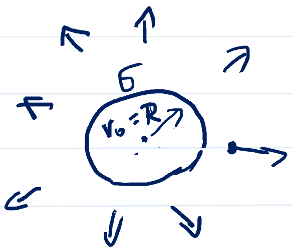
S1.1.19-1.1.20 Určete pomocí Gaussova zákona průběhy Intenzity a potenciálu a pole v okolí následujících homogenně nabitých objektů:

a) kulová slupka

b) koule

c) válcová plocha a válec

Pole kulové slupky nabité nábojem a pl. hustotě σ



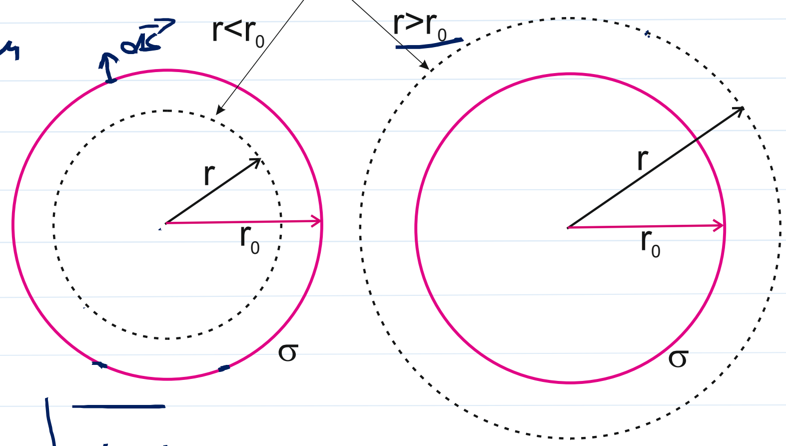
Pole vně i uvnitř, pomocí G.z.

$$\Phi_S = \frac{Q_c}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$E = (E_k)$

E – závisí na vzdálenosti od středu

Symetrie



$r > r_0$

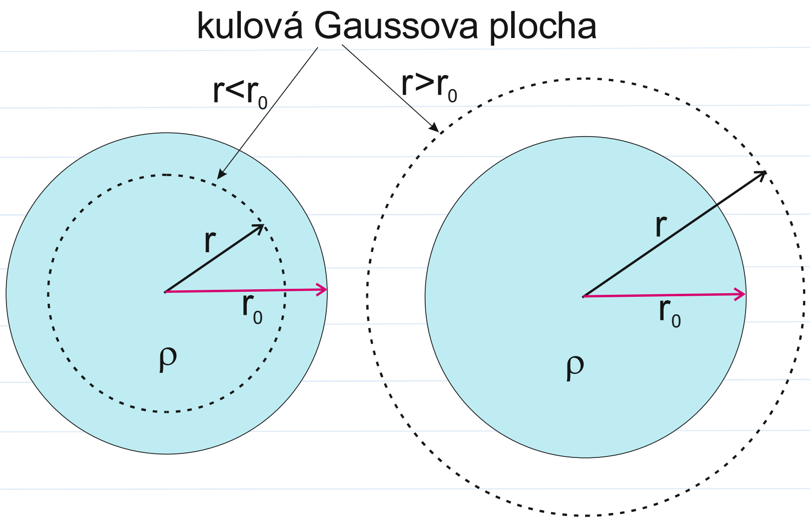
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r_0^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

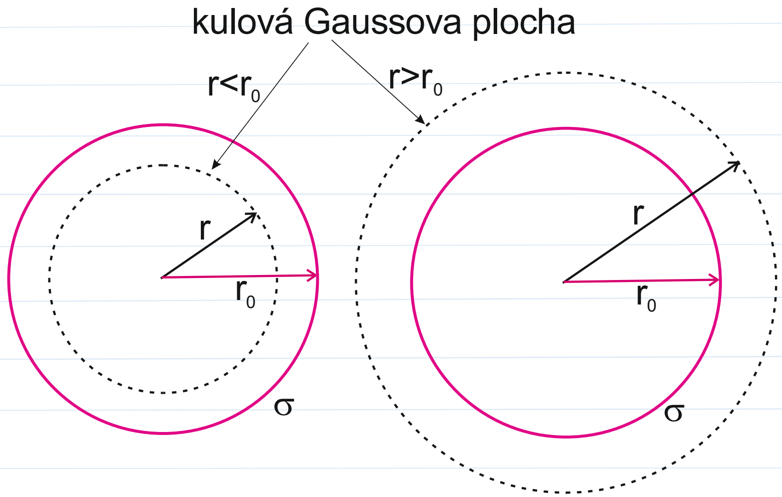
$$\oint_S E\, dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi r_0 \sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_c}{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{r_0}{r}$$

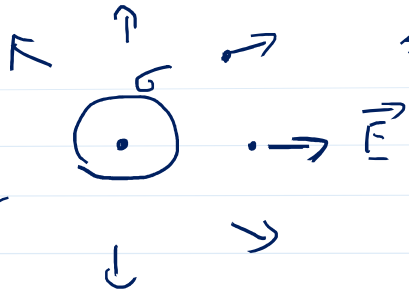
$r < r_0$

$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$ pro $r < r_0$


kulová Gaussova plocha
r<r0
r>r0
r
r0
ρ
r
r0
ρ


kulová Gaussova plocha
r<r0
r>r0
r
r0
σ
r
r0
σ

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0}$$



$\vec{E} = E(r)$

$r > R_0$

$$E \cdot \cancel{2}\pi r \cdot l = \frac{\sigma\, \cancel{2}\pi R_0\, \cancel{l}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R_0}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

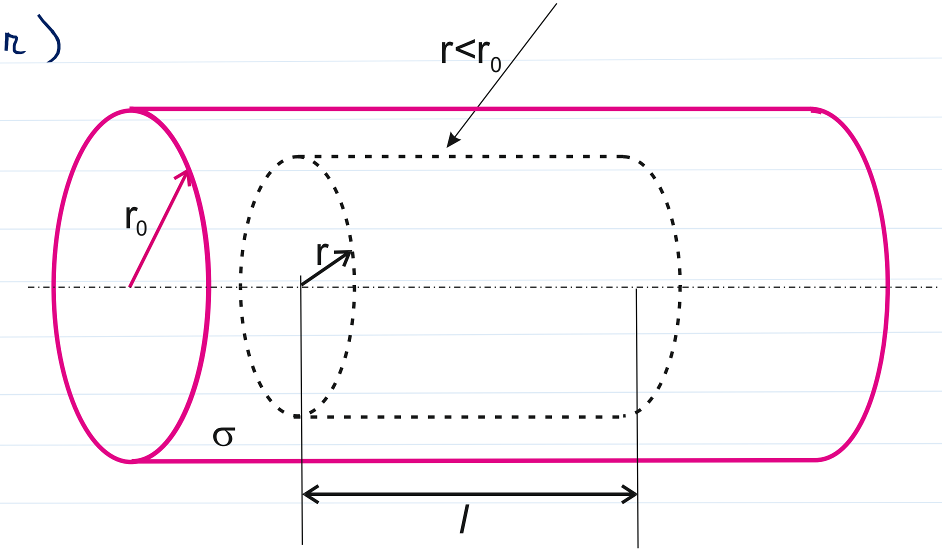
$\underbrace{\sigma\, 2\pi R_0}_{} \sim \tau$

τ – délková hustota

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$

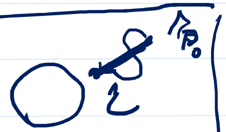
válcová Gaussova plocha



$r < R_0$

$$E \cdot 2\pi r l = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$W_{P_0 \to P} = -\int_{R_0}^{r} E(r')\,dr' =$$



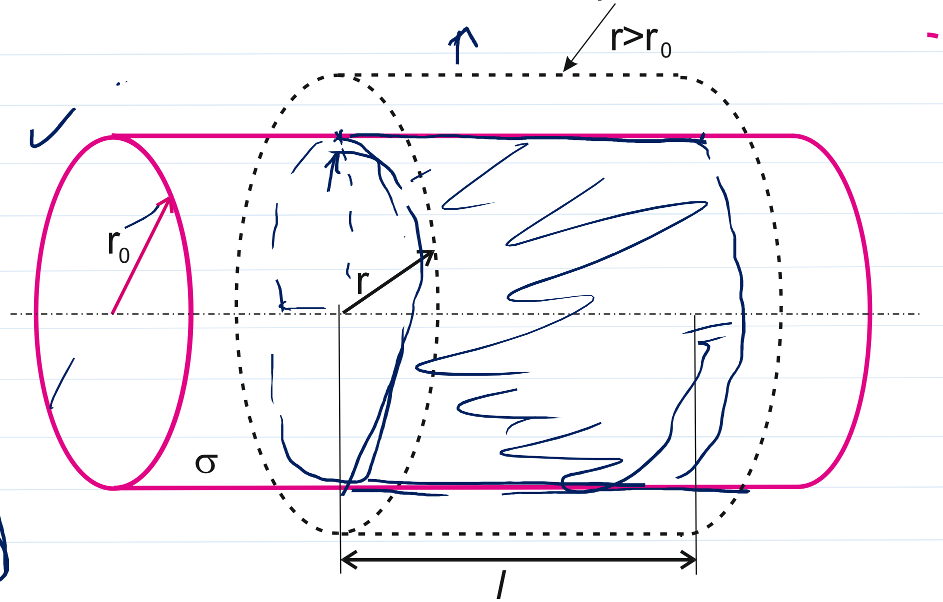
$$= -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_0}^{r}\frac{1}{r'}\,dr' = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln r'\Big]_{R_0}^{r} =$$

$\varphi(r_0) = 0$

$r_0 = 1$

$$= -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{R}{R_0}\right) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln r - \ln R_0\right)$$

válcová Gaussova plocha

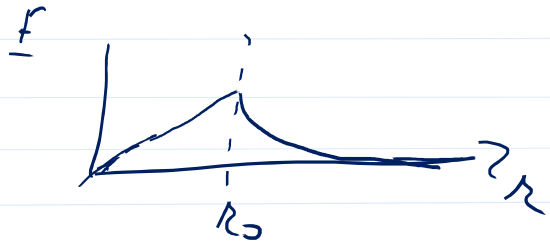


Válec - nabitý objemově nábojem o hustotě $\underline{\underline{\rho}}$

z G.z

$R > R_0$ $\quad E \cdot 2\pi R \cdot l = \dfrac{\pi R_0^2 \cdot l \cdot \rho}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E = \frac{R_0^2 \rho}{2\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

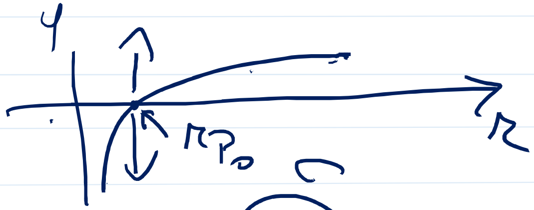


$R < R_0$ $\quad E \cdot \cancel{2\pi R} \cdot \cancel{l} = \dfrac{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \cancel{l} \rho}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R$$

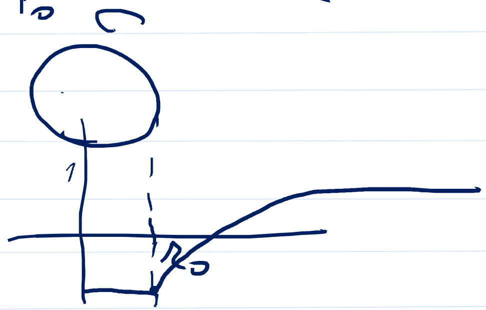
$r > r_0$ Volimo $r_{P_0} = 1$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln r\right)} + C$$

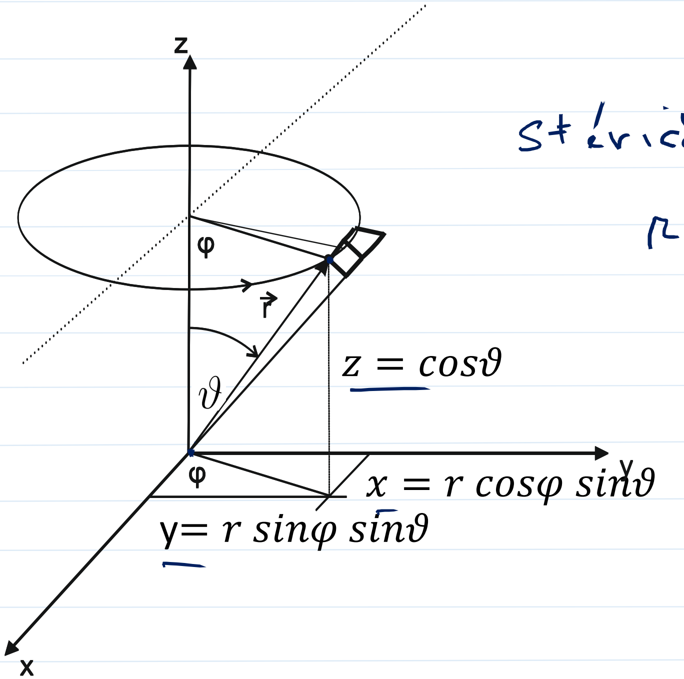


$r < r_0$

$$\varphi = -\underbrace{\int_{r_{P_0}}^{r_0} E\,dr}_{K} - \int_{r_0}^{r} E\,dr + 0$$



S.1.1.18 Určete potenciál pole nabité kulové vrstvy o vnějším poloměru R_1 a vnitřním R_2 integrací.
Hustota náboje je konstantní .

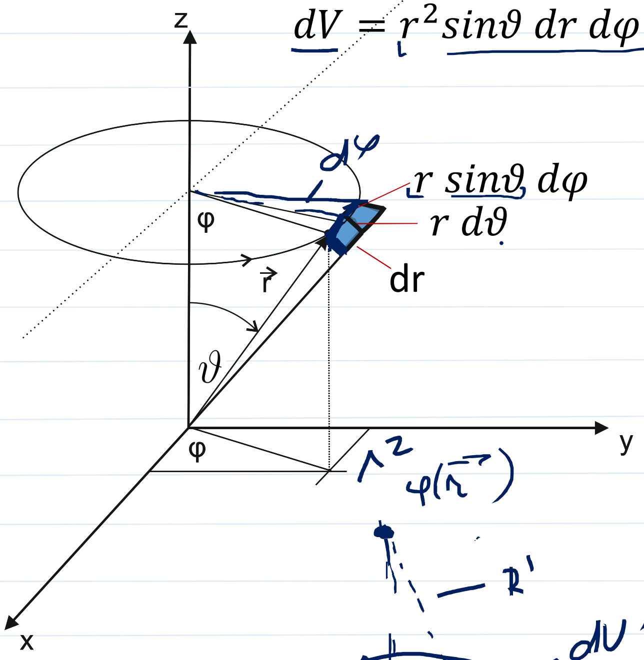


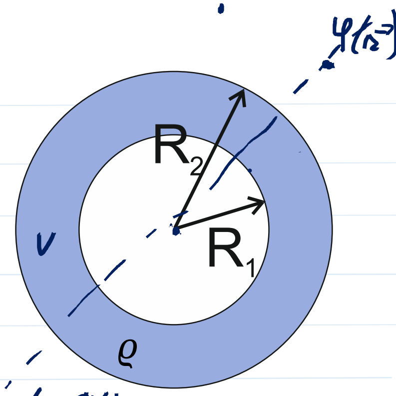
sférické souradnice

r, φ, ϑ

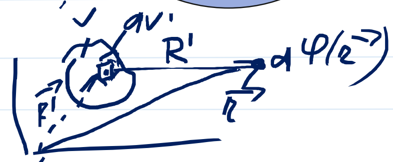
S.1.1.18 Určete potenciál pole nabité kulové vrstvy o vnějším poloměru R_2 a vnitřním R_1 integrací. Hustota náboje je konstantní .

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$





$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho\, dV'}{R'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho\, dV'}{|\vec r - \vec r'|}$$



přes objem tělesa r', φ', ϑ'

pro bod v prostoru $\varphi(\vec r)$ $\quad r, \varphi, \vartheta$

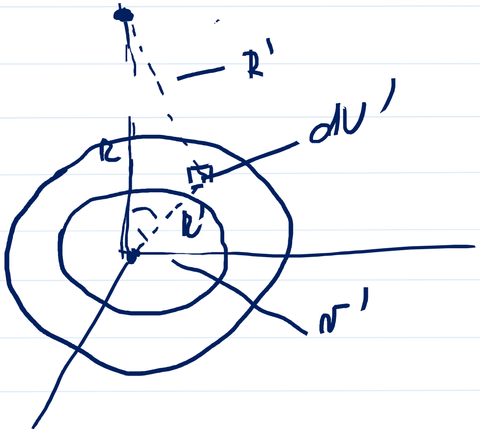
$\vec R' = \vec r - \vec r'$

$R' = |\vec R'| = |\vec r - \vec r'|$

kosinová věta

$$R' = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta'}$$

$$\int_{V_{slupky}} \to \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \quad \varphi', \vartheta', r'$$



r, φ, ϑ

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\varrho\, r'^2 \sin\vartheta'\, dr'\, d\vartheta'\, d\varphi'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\vartheta'}}$$

integrace přes φ' $d\sigma'$ $\times 2\pi$

$$= \frac{\varrho\,\cancel{2\pi}}{2\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{2r\,r'^2\sin\vartheta'\,dr'\,d\vartheta'}{2r\sqrt{\underbrace{r'^2+r^2-2rr'\cos\vartheta'}_{t}}} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\cdot\int_{R_1}^{R_2}\int_t\frac{r'\,dt\,dr'}{2r\sqrt{t}} =$$

$(\sqrt{z^2}=|z|)$

ϑ' r'

$$dt = \sin\vartheta'\,d\vartheta'\cdot 2rr'$$

$$= \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{r'\cancel{2}}{\cancel{2}r}\left[\sqrt{t}\right]_0^{\pi} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{r'}{r}\left[\sqrt{r'^2+r^2-2rr'\cos\vartheta'}\right]_0^{\pi}dr' =$$

$$= \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{r'}{r}\Big[\underbrace{\sqrt{r'^2+r^2+2rr'}}_{|r'+r|}-\underbrace{\sqrt{r'^2+r^2-2rr'}}_{|r'-r|}\Big]dr' = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r}\int_{R_1}^{R_2}r'\left(|r'+r|-|r'-r|\right)dr'$$

větvení - vně koule

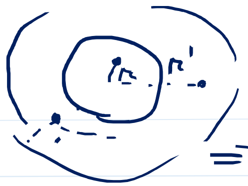
$\underline{r>R_2} \Rightarrow \underline{r>r'}$ $\quad |r'-r| = r-r'$

$$\varphi(r) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r}\int_{R_1}^{R_2}r'\underbrace{\left(r'+\cancel{r}-\cancel{r}+r'\right)}_{2r'^2}dr' = \frac{\varrho}{\cancel{2}\varepsilon_0 r}\left[\cancel{2}\frac{r'^3}{3}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0 r}\left(R_2^3-R_1^3\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\underbrace{\varrho\,\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3-R_1^3\right)}_{} = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Q_c - náboj ve vrstvě

v dutině

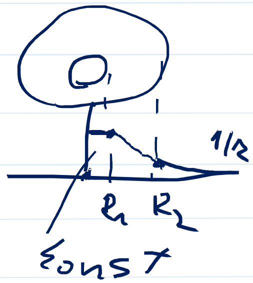


$r < R_1$ = $\Rightarrow r' > r \Rightarrow |r'-r| = r'-r$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r} \int_{R_1}^{R_2} \underbrace{r'(r'+r-r'+r)}_{2rr'} dr' = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} 2r' dr' = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = \underline{konst}$$

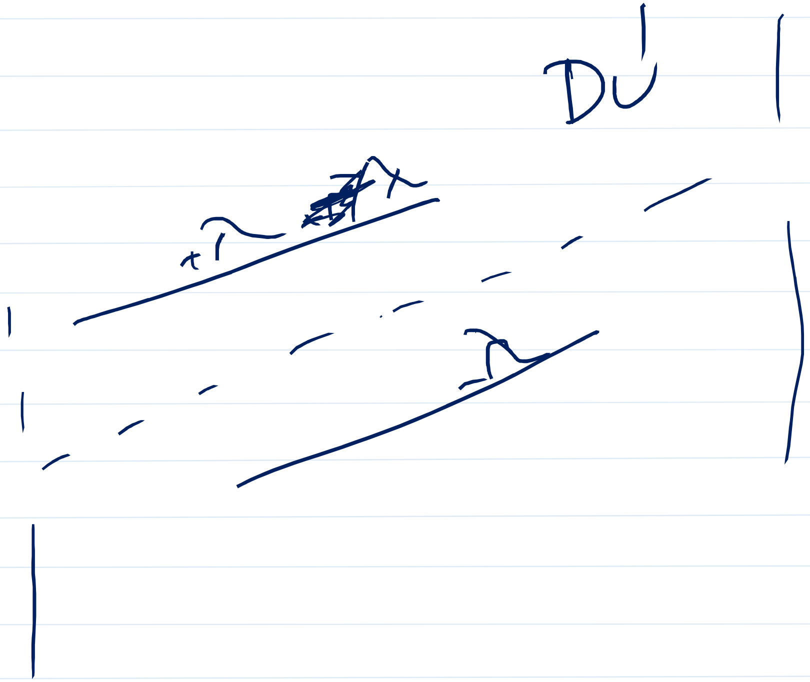
$R_1 < r < R_2$ – kombinace předchozího

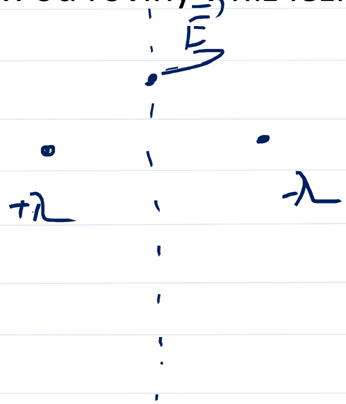
$$\Rightarrow \frac{\varrho}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \left[\underset{r'<r}{\int_{R_1}^{r} 2r'^2 dr'} + \underset{r'>r}{\int_{r}^{R_2} 2rr' dr'} \right] = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0 r}\left(\frac{2}{3}\left(r^3 - R_1^3\right)\right) + \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - r^2\right)$$



(DÚ)

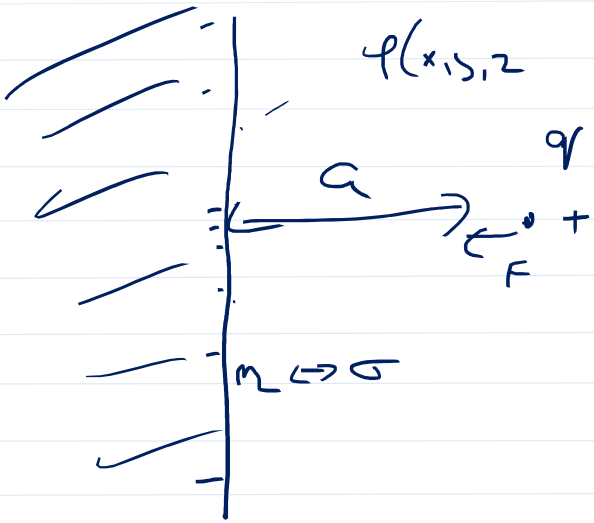
1.1.22. Dva dlouhé tenké vodiče, vložené rovnoběžně ve vzdálenosti *d* od sebe jsou nabity s lineární hustotou +λ a -λ (λ=konst.). Určete intenzitu pole ***E*** v bodě, který leží v rovině symetrie ve vzdálenosti *x* od roviny v níž leží vodiče.





DÚ

S 1.1.14. Určete potenciál elektrostatického pole vzbuzeného bodovým nábojem *q* nacházejícím se ve vzdálenosti *a* od vodivé rovinné stěny udržované na nulovém potenciálu. Určete dále plošnou hustotu η náboje na vodivé stěně, jeho celkovou velikost a sílu *F*, kterou je náboj přitahován ke stěně.



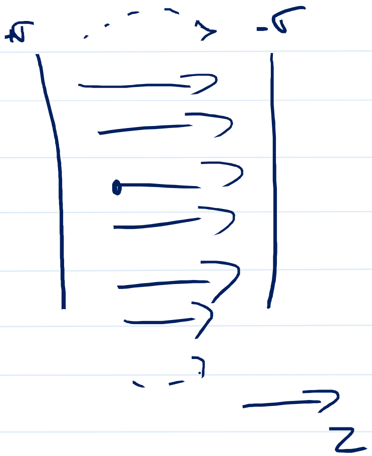
S 1.1.12. Do homogenního elektrického pole o intenzitě $\boldsymbol{E} \equiv (0, 0, E_0)$ je vložen elementární dipól s momentem $\boldsymbol{p}$ majícím též směr osy z, $\boldsymbol{p} \equiv (0, 0, p_0)$.

a) Dokažte, že ekvipotenciální plochou s nulovým potenciálem je kulová plocha a určete její poloměr a.
   (Kde všude je potenciál nulový?)

b) Změní se rozložení pole, jestliže do této ekvipotenciální plochy umístíme vodivou plochu nabitou na nulový potenciál?

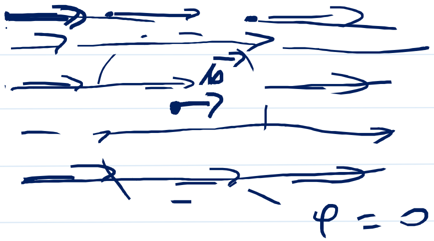
c) Jaká by byla hustota náboje na této vodivé ploše?

d) Jaký by byl celkový dipólový moment P vodivé plochy?



konstanta

$\vec{E} = (0, 0, E_0)$ $\qquad$ $\vec{p} = (0, 0, p_0)$



$\varphi = 0$ - koule $\qquad a = ?$

$\Delta\varphi = 0$