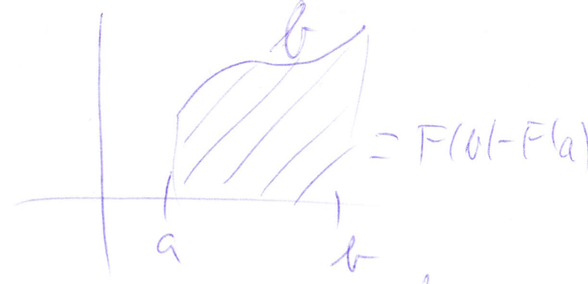
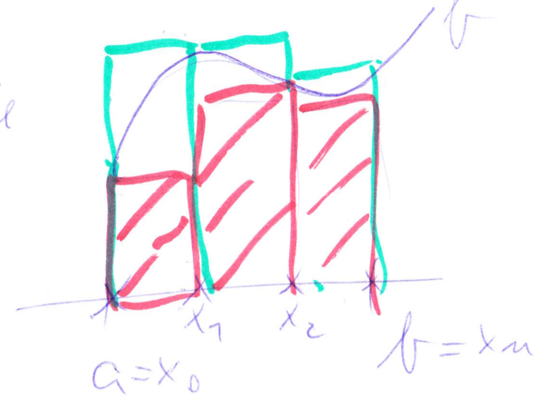
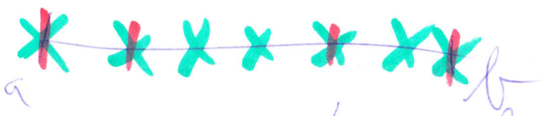
# 7. Určitý integrál

## 7.1. Riemannův integrál



**Def** Konečnou podmnožinu $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme dělením intervalu $[a,b]$, jestliže
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
Řekneme, že dělení $D'$ intervalu $[a,b]$ zjemňuje dělení $D$ intervalu $[a,b]$, jestliže každý bod dělení $D$ je i bodem dělení $D'$.





**Definice** Nechť $f$ je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D$ je dělení $[a,b]$. Definujme horní a dolní součty

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

horní Riemannův integrál $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,D) : D \text{ je dělení } [a,b]\}$

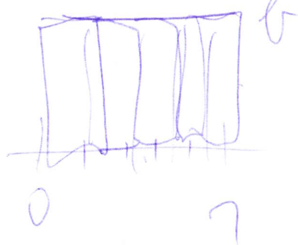
a dolní Riemannův integrál $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,D) : D \text{ je dělení } [a,b]\}$.

Pokud $(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, pak řekneme, že $f$ je Riemannovsky integrovatelná a klademe $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Množinu funkcí mající Riemannův integrál značíme $R([a,b])$.

**Poznámka:** Omezenost $f$ je nutná potřeba.

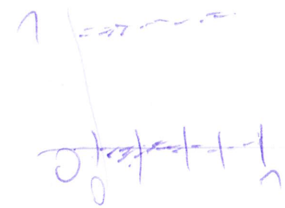
**Příklady:** 1. $(R)\int_0^1 1\,dx = 1$



$\forall D$ dělení $[0,1]$ $\quad S(f,D) = s(f,D) = 1$

2. Nechť $D(x)$ je Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$



$\forall D$ dělení $[0,1]$ $\quad s(f,D) = 0$, $\quad S(f,D) = 1$

$(R)\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0 \qquad (R)\overline{\int_0^1} D(x)\,dx = 1 \qquad D(x) \notin R([0,1])$.

~~Věta~~

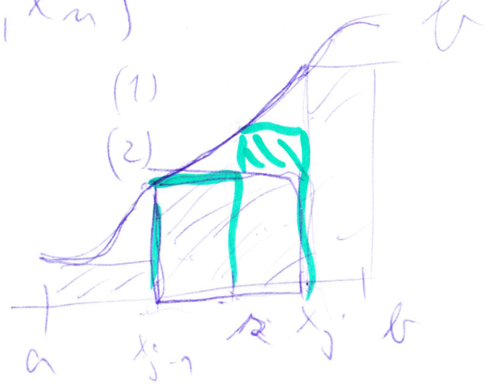
**Věta 7.1** (o zjemnění dělení)

Nechť $f$ je omezená funkce na $[a,b]$, $D$ a $D'$ jsou dělení intervalu $[a,b]$ a $D'$ zjemňuje $D$. Pak $s(f,D) \leq s(f,D') \leq S(f,D') \leq S(f,D)$.

Dk: $s(f,D') \leq S(f,D')$ je triviální z $\sup\{\ \} \geq \inf$.

Předpokládejme, že $D = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n\}$

$D' = \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_j, \dots, x_n\}$




Pak
$$\inf\{f(x),\ x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \inf\{f(x),\ x \in [x_{j-1}, z]\} \quad (1)$$
$$\inf\{f(x),\ x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \inf\{f(x),\ x \in [z, x_j]\} \quad (2)$$

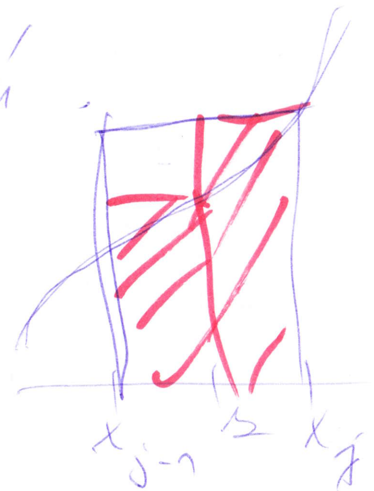
$(1)\cdot(z - x_{j-1}) + (2)\cdot(x_j - z)$: dostaneme

$$\inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\}\cdot(x_j \cancel{- z} + \cancel{z} - x_{j-1}) \leq$$
$$\leq \inf\{f(x), x \in [x_{j-1}, z]\}\cdot(z - x_{j-1}) + \inf\{f(x), x \in [z, x_j]\}\cdot(x_j - z)$$

$$\Rightarrow \quad s(f,D) \leq s(f,D').$$

Pokud se $D$ a $D'$ liší o více bodů postupujeme indukcí.

Analogicky lze dokázat $S(f,D') \leq S(f,D)$




$\square$

**Věta L 7.2** (o dvou děleních)

Nechť $f$ je omezená funkce na $[a,b]$ a $D_1, D_2$ jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak $s(f,D_1) \le S(f,D_2)$.

Dk: Nechť $D$ zjemňuje $D_1$ i $D_2$ $(D = D_1 \cup D_2)$.
Pak $D$ je jemnější než $D_1$ i $D_2$ a podle V 7.1.

$$s(f,D_1) \le s(f,D) \le S(f,D) \le S(f,D_2).$$

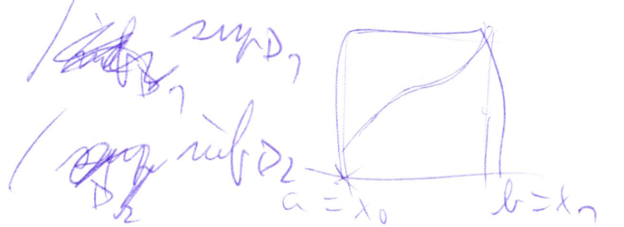
$\square$

Důsledek: Nechť $f$ je omezená na $[a,b]$, $D_1$ a $D_2$ jsou dělení $[a,b]$.
$m := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ a $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Pak $m\cdot(b-a) \le s(f,D_1) \le (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,D_2) \le M\cdot(b-a)$.


víme $s(f,D_1) \le S(f,D_2)$

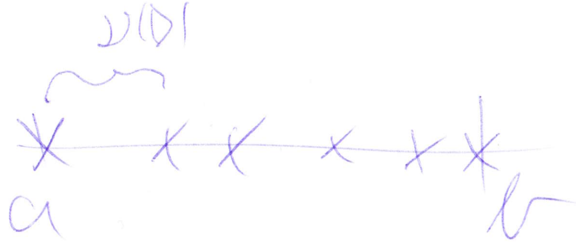
$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,D_2)$




---

**Definice** Nechť $D$ je dělení $[a,b]$. Číslo

$\nu(D) = \max_{j=1,\dots,n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme normou dělení $D$.



**Věta T 7.3** (aproximace R integrálu pomocí součtů)

Nechť $f$ je omezená funkce na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení $[a,b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Potom

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \inf_{n\in\mathbb{N}} S(f,D_n) \quad \text{a} \quad (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup s(f,D_n).$$

Dk: BÚNO $f \geq 0$, jinak přičti k $f$ konstantu.

Stačí dokázat ~~první~~ druhá rovnost, ~~druhá~~ první je analogicky.

Nechť $D$ je dělení a $\varepsilon > 0$. Stačí dokázat $\exists\, n_0 \; s(f,D_{n_0}) \geq s(f,D) - \varepsilon$.

Tak $= \sup_D s(f,D) \geq \sup_{D_n} s(f,D_n) \geq \sup_D (s(f,D) - \varepsilon) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon$.

Nechť $0 \leq f \leq K$ a zvolme $n_0$, aby $\nu(D_{n_0}) \leq \dfrac{\varepsilon}{K \cdot 4 \cdot \#\text{intervalů } D}$.

Označme $\mathcal{H}$ = intervaly vzniklé dělením $P = D \cup D_{n_0}$

a $\mathcal{J}$ = intervaly z $P$, v kterých není "žádný bod dělení $D$.

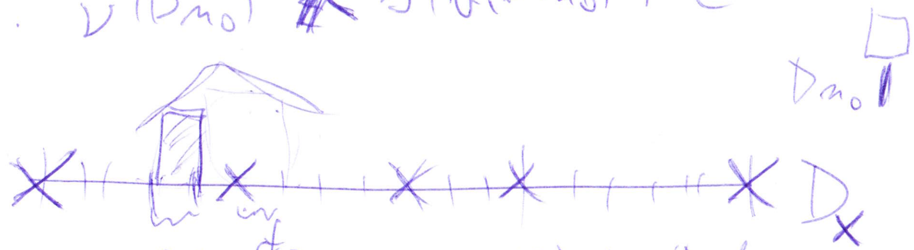
$P$ je ~~jemnější~~ jemnější než $D$ a proto z věty 7.7.

$$s(f,D) \leq s(f,P) = \sum_{L\in\mathcal{H}} \inf_L f \cdot \text{délka } L =$$

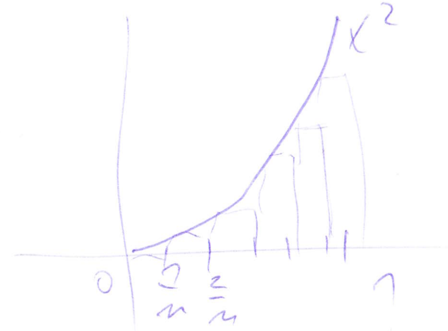
$$= \sum_{L\in\mathcal{J}} \inf_L f \cdot \text{délka } L + \sum_{L\in\mathcal{H}\setminus\mathcal{J}} \inf_L f \cdot \text{délka } L$$

$$\leq s(f,D_{n_0}) + 2\cdot\#\text{intervalů } D \cdot K \cdot \nu(D_{n_0}) < s(f,D_{n_0}) + \varepsilon$$

"$f \geq 0$ a $D_{n_0} \supset \mathcal{J}$"



**Příklad:** Spočtěte $(R)\int_0^1 x^2\,dx$




$$D_n = \left\{ \frac{j}{n} \right\}_{j=0}^{n}$$

$$S(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=1}^{n} (j)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} = (R)\int_0^1 x^2\,dx.$$


$$s(f, D_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)\cdot n\,(2\cdot(n-1)+1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} = (R)\int_0^1 x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \quad (R)\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$