4. cvičení z PSt — 23.3.2021

Z každé kapitolky (mimo Bonusy) vyřešte aspoň jeden příklad!

Zacházení s $\mathbb{E}$, var.

1. Nechť X, Y jsou diskrétní n.v., $a \in \mathbb{R}$.
(a) Ukažte, že $var(X + a) = var(X)$.
(b) Vyjádřete $var(aX)$ pomocí $var(X)$.
(c) * Ukažte, že $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$ pokud X, Y jsou nezávislé.

2. (a) Pokud $\mathbb{E}(X^2) = 0$, tak $P(X = 0) = 1$.
(b) Předpokládejme, že $var(X) = 0$, dále že $\mathbb{E}(X)$ existuje a je konečná. Pak $X = \mathbb{E}(X)$ s.j., neboli $P(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

Podmíněná střední hodnota

3. V testu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností p jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.
(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?
(b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?
(c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

Nezávislost

4. Ukažte, že jevy A, B jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé jejich indikátorové veličiny.

5. Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \leq x \,\&\, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Pro jednoduchost můžete předpokládat, že $Im(X) = Im(Y) = \{1, 2, \dots, n\}$ pro nějaké n.

Náhodné vektory

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \,\&\, Y = y)$. Připomeňte si, jak z ní zjistit „jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y.

6. Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme X počet vytažených es, Y počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pstní funkce p_X, p_Y.

7. Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).
(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $X = X_1$?
(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Y = \max(X_1, X_2)$?
(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$?
(d) O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli, o kolik je vyšší $\mathbb{E}(Z)$ než $\mathbb{E}(X)$?

Nápověda: Určete napřed $P(Y \leq k)$, $P(Z \leq k)$?

8. Nezávislé n.v. $X_1, \dots, X_n$ mají geometrické rozdělení s parametry $p_1, \dots, p_n$. Jaké je rozdělení $\min(X_1, \dots, X_n)$?

9. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, 6$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i.
(a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. X_1, …, X_n.
(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

Bonusy

10. Připomeňte si definici indikátorové náhodné veličiny I_A.
(a) Jaká je $\mathbb{E}(I_A)$?
(b) Nechť $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Ověřte rovnost

$$1 - I_A = \prod_{i=1}^{n} (1 - I_{A_i}).$$

(c) Roznásobte a použijte větu o linearitě střední hodnoty, abyste získali princip inkluze a exkluze.

11. * Označme M počet emailů, které dostaneme za den, S počet spamů mezi nimi, H počet „hamů“ – těch, co nejsou spamy. Předpokládejme, že $M \sim Pois(\lambda)$ a že každý email má nezávisle na ostatních pravděpodobnost p, že je to spam.
(a) Vyjádřete $P(S = k)$ (jako nekonečnou sumu) pomocí sdruženého rozdělení M a S.
(b) Odvoďte, že $S \sim Pois(p\lambda)$.
(c) Odvoďte, že $H \sim Pois((1 - p)\lambda)$ a také, že H, S jsou nezávislé n.v.

12. * V tipovací hře má soutěžící na výběr n otázek, ze kterých si může postupně vybírat. U i-té otázky s pravděpodobností p_i odpoví správně, získá za to h_i korun a právo dalšího výběru. Pokud neodpoví správně, končí. Předpokládejme, že cílem je maximalizovat střední hodnotu zisku. Ukažte, že toho docílí, bude-li vybírat otázky seřazené podle hodnoty $\frac{p_i h_i}{1-p_i}$.