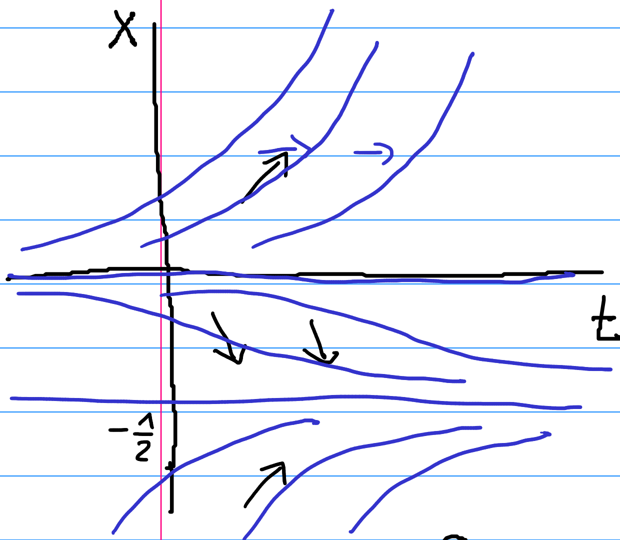
4. CVIČENÍ – KVALITATIVNÍ ANALÝZA

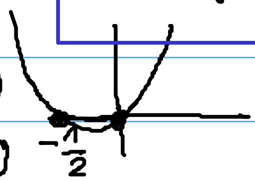
1. autonomní rovnice

Př: $x' = 2x^2 + x$ ... autonomní rovnice
$f(t,x) = 2x^2 + x$ nezávisí na čase



- rovina se rozpadne na vodorovné pásy
- x je řešení $\Rightarrow y(t) := x(t+c)$ je také řešení
- Je-li $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = a \Rightarrow f(a) = 0$.

$x' > 0 \iff 2x^2 + x > 0$
$x(2x+1) > 0$



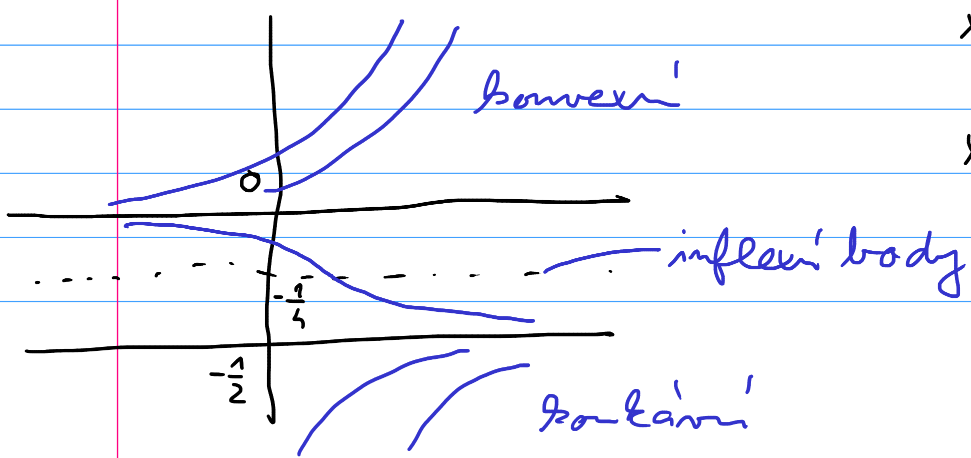
$x \in (-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow x' < 0$
jinak $x' \geq 0$
$x \equiv 0, x = -\frac{1}{2}$ stac. řešení

Vypočítáme konvexitu: $x'' = (x')' = (2x^2+x)' = 4x(t)\cdot x'(t) + x'(t) = (4x+1)x' = (4x+1)(2x^2+x) = x(4x+1)(2x+1)$

mění znaménko v bodech $0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$

$x'' > 0$ $(0, +\infty), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

$x'' < 0$ $(-\infty, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{4}, 0)$



a) Napojí se řešení v konečném čase na stacionární řešení? Nebo se k nim jen „přimykají" pro $t \to \pm\infty$?

b) Uteče řešení do nekonečna v konečném čase?

$$x' = 2x^2 + x$$

$$\frac{x'}{2x^2+x} = 1 \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{2x^2+x}\,dt = t - t_0$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{2x^2+x}\,dx = t - t_0$$

Uteče x do nekonečna v konečném čase?

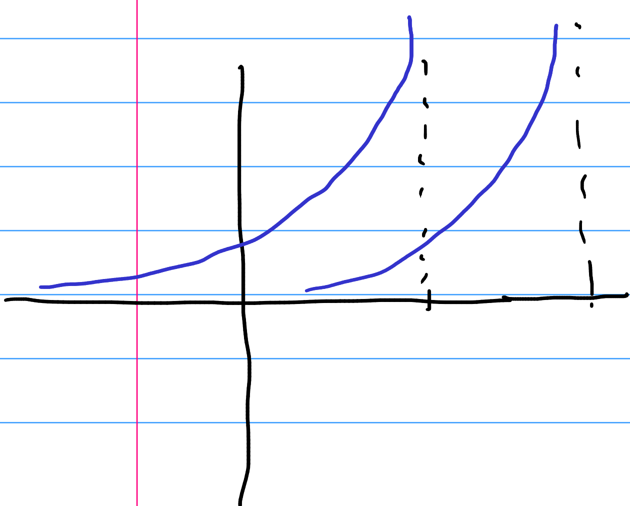
$$x(t) \to +\infty$$

$$\int_{x(t_0)}^{+\infty} \frac{1}{2x^2+x}\,dx < \infty$$ (integrál konverguje – srovnávací kritérium)

$$\Rightarrow t - t_0 < \infty \qquad \Rightarrow t < \infty$$

$\Rightarrow$ uteče do nekonečna v konečném čase

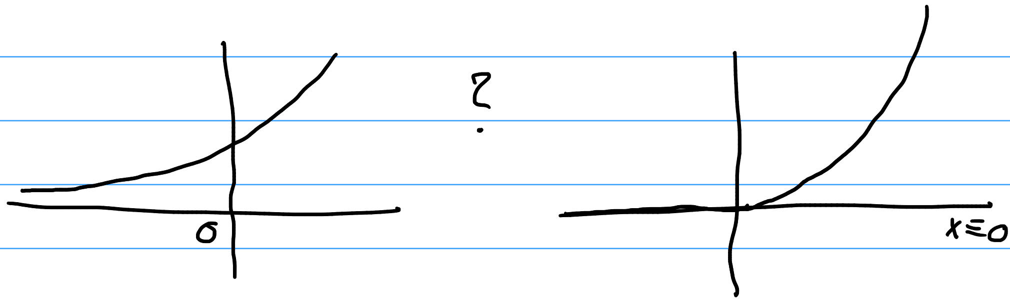
... „nastane blow-up".



Obecný závěr:

blow-up nastane $\iff \displaystyle\int_{k}^{+\infty} \frac{1}{g(x)}\,dx$ konverguje

Napojí se řešení na stacionární řešení v konečném čase ?



Vzhledem k tomu, že $f(t,x) = 2x^2 + x$ má spojitou derivaci $\Rightarrow$ máme jednoznačnost $\Rightarrow$ k napojení nedojde

Kdybychom neměli jednoznačnost

k napojení na řešení $x \equiv a$ dojde $\Leftrightarrow$ $\int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{g(x)}\,dx$ konverguje

$$\boxed{t - t_0 = \int_{x(t_0)=a}^{x(t)=b} \frac{1}{g(x)}\,dx}$$

Barrowův vzorec

Za jaký čas vystoupá řešení z hodnoty $\underline{a}$ do hodnoty $\underline{b}$.

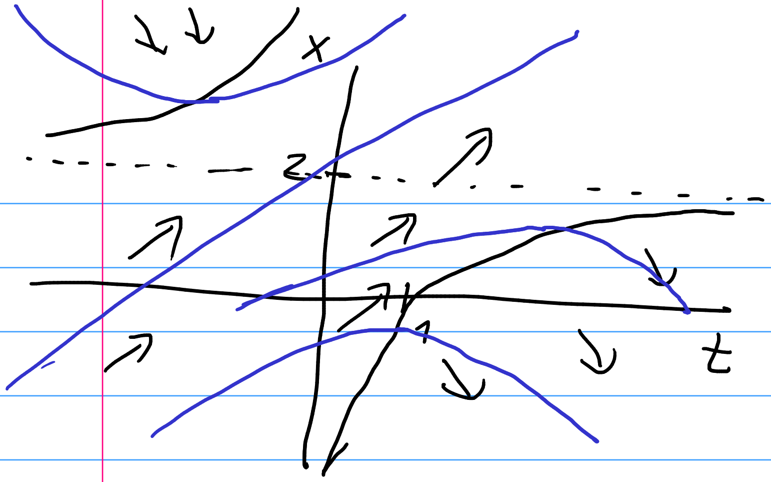
2. nenastavení rovnice

Př. $x' = t(x-2) + 2$

$x' > 0 \Leftrightarrow t(x-2) + 2 > 0 \Leftrightarrow x - 2 > -\frac{2}{t}$, $t > 0$

$x - 2 < -\frac{2}{t}$ $\quad t < 0$

$x = 2 - \frac{2}{t}$



$$x'' = (x')' = (tx - 2t + 2)'$$

$$= x + tx' - 2 =$$

$$= x + t^2(x-2) + 2t - 2 > 0$$

$$x(1+t^2) - 2t^2 + 2t - 2 > 0$$

$$x > \frac{2(t^2 - t + 1)}{1+t^2}$$

nakreslím graf této funkce a zjistím, kde je x konkávní a kde konvexní.

Uteče mi řešení do $+\infty$ v konečném čase?

$$x' = t\left(x - 2 + \frac{2}{t}\right)$$

$$\frac{x'}{x - 2 + \frac{2}{t}} = t \quad \Big/ \int_{t_0}^{t}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'}{x - 2 + \frac{2}{t}}\, dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2$$

např. pro $t > 1$, $x > 0$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'}{x}\, dt = \int_{x(t_0)}^{x(t) = +\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty \quad \text{Divergje}$$

$\Rightarrow$ nebude blow-up.

Úlohy na cvičení:

$$x' = \sqrt[3]{1 - x^2}$$

$$x' = x\ln(x+3)$$

$$x' = tx(x-2)$$

$$x' = \frac{x}{t} + t^2$$