$M$ $\mathcal{F}_t$-martingal $\quad E M_t^2 < \infty$

$M^2 = (M_t^2,\ t \in [0,T])$ submartingal

$M^2 = \tilde{M} + \langle M, M \rangle$ $\qquad \langle M, M \rangle$ neklesající

martingal $\qquad$ prediktabilní variace $\qquad \langle M, M \rangle_0 = 0$ s.j.

$\mathcal{F}_t$-prediktabilní, zprava spojitý

Pokud $M^2 = M' + A$ $\quad M'$ martingal

$A_0 = 0$ s.j. neklesaj., zprava sp. $\mathcal{F}_t$-prediktabilní

$\Rightarrow M'$ je modifikací $\tilde{M}$, $A$ je modifikace $\langle M, M \rangle$

N homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda \in (0,\infty)$

$N_t - \lambda t$ je martingal

$E(N_t - \underset{\substack{\| \\ EN_t}}{\lambda t})^2 = \mathrm{var}(N_t) = \lambda t < \infty$ a můžeme použít Doobův-Meyerův rozklad na $(N_t - \lambda t)^2$

$$E\left[(N_t-\lambda t)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\left(N_t - N_s + N_s - \lambda(t-s) - \lambda s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] =$$

nezávislé

$$= E\left[\left((N_t - N_s - \lambda(t-s)) + N_s - \lambda s\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\left(N_t - N_s - \lambda(t-s)\right)^2 \mid \cancel{\mathcal{F}_s}\right]$$

$$+ 2E\left[\left(N_t - N_s - \lambda(t-s)\right)\boxed{(N_s - \lambda s)} \mid \mathcal{F}_s\right] + (N_s - \lambda s)^2 =$$

z měřitelnosti vůči $\mathcal{F}_s$

$$\underbrace{E\left[N_t - N_s - \lambda(t-s)\right]^2}_{var(N_t - N_s) = \lambda(t-s)} + (N_s - \lambda s)\,\underbrace{\cancel{E\left[N_t - N_s - \underbrace{\lambda(t-s)}_{E N_t - N_s}\right]}}_{=0} + (N_s - \lambda s)^2$$

$$E\left[(N_t - \lambda t)^2 \,\middle|\, F_s\right] = \lambda(t-s) + (N(s) - \lambda s)^2$$

$$E\left[(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t \,\middle|\, F_s\right] = (N_s - \lambda s)^2 - \lambda s$$

$$t \rightsquigarrow s$$

deterministické
spojitá v s ..
neklesající

$F_1$ - prediktabilní

$N_t$ subm. $\quad N_t - \lambda t$ $\qquad \lambda t = \langle N_t - \lambda t, N_t - \lambda t \rangle$

$(N_t - \lambda t)^2$ subm $\quad (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$

---

Nechť $M, N$ jsou zprava spojité $\mathcal{F}_t$ - adaptované $L_2$ - martingaly

$\langle M, M \rangle \qquad M^2 - \langle M, M \rangle$ jsou martingaly

$\langle N, N \rangle \qquad N^2 - \langle N, N \rangle$

$M \cdot N \qquad M+N$ jsou opět $\mathcal{F}_t$ - adaptované, zprava spojité $L_2$ - martinga-

$M - N$ ly $\Rightarrow \exists \langle M+N, M+N \rangle, \langle M-N, M-N \rangle$

$(M+N)^2 - \langle M+N, M+N \rangle$ martingal

$-\ (M-N)^2 - \langle M-N, M-N \rangle$ martingal

$4MN - \left( \langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle \right)$ je martingal

$MN - \frac{1}{4} \left( \underline{\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle} \right)$ je martingal

začína v 0 a je $\mathcal{F}_t$-predikovateľný

a zprava spojitý

a jakožto rozdiel dvou neklesajúcich má konečnú úplnú variáciu:

**Definice 19:** Buďte $M, N$ zprava spojité $\mathcal{F}_t$-martingaly s konečnými druhými momenty. Pak proces $\langle M, N\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle M+N, M+N\rangle - \langle M-N, M-N\rangle\right)$ nazveme KOVARIACÍ procesů $M, N$.

**Pozorování:** Pro $M, N$ spojité $L_2$-martingaly ($\mathcal{F}_t$-adapt.)

$\exists$ až na modifikaci jediný proces $\langle M, N\rangle$ takový, že

1) $\langle M, N\rangle_0 = 0$ s.j.

2) $M \cdot N - \langle M, N\rangle$ je $\mathcal{F}_t$-martingal

3) $\langle M, N\rangle$ je zprava spojitý a $\mathcal{F}_t$-predikovatelný

4) $\langle M, N\rangle$ má trajektorie s konečnou variací.

$f : [0,T] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f$ má konečnou úplnou variaci na $[0,T]$, pokud

$$\sup_{\Delta} \sum_{t_i \in \Delta} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty \qquad \Delta = \{(t_0, \dots, t_n);\ n \in \mathbb{N},\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$$

---

Víme, že martingal má konstantní střední hodnotu

$$E M_t = E[\underbrace{E(M_t \mid \mathcal{F}_s)}_{s.j. = M_s}] = E M_s = E M_0$$

$M^2 - \langle M, M \rangle$ je martingal

$$E\left[M_1^2 - \langle M,M\rangle_1\right] = E\left[M_0^2 - \underbrace{\langle M,M\rangle_0}_{=0}\right] = EM_0^2$$

$$E\left[M_1^2 - M_0^2\right] = E\left[(M_1 - M_0)^2\right]$$

$$\parallel$$

$$E\left[E\left[(M_1 - M_0)^2 \mid \mathcal{F}_0\right]\right]$$

$$E\left[M_1^2 - 2M_1M_0 + M_0^2 \mid \mathcal{F}_0\right] = E\left[M_1^2 \mid \mathcal{F}_0\right] - 2M_0 \overbrace{E\left[M_1 \mid \mathcal{F}_0\right]}^{M_0} + M_0^2$$

$$= E\left[M_1^2 \mid \mathcal{F}_0\right] - M_0^2 = E\left[M_1^2 - M_0^2 \mid \mathcal{F}_0\right]$$

$$E\left[(M_t - M_0)^2\right] = E\langle M,M\rangle_t$$

Pokud $M_0 = 0 \Rightarrow EM_t^2 = E\langle M,M\rangle_t$

$$\overset{\shortparallel}{\operatorname{var} M_t}$$

víme $E\left[M_t N_t - M_s N_s \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s \mid \mathcal{F}_s\right]$

$s = 0$

$+E[\ ]$

$$E M_t N_t - E M_0 N_0 = E\langle M,N\rangle_t$$

$$\boxed{\begin{array}{l} EM_t = EM_0 \\ EN_t = EN_0 \end{array}}$$

$$\left(EM_tN_t - EM_tEN_t\right) - \left(EM_0N_0 - EM_0 \cdot EN_0\right) = E\langle M,N\rangle_t$$

$$\operatorname{cov}(M_t,N_t) - \operatorname{cov}(M_0,N_0) = E\langle M,N\rangle_t$$

$$\operatorname{cov}(M_t,N_t) - \operatorname{cov}(M_s,N_s) =$$

$$E\big(\underbrace{\langle M,N\rangle_t}_{} - \langle M,N\rangle_s\big)$$

!! je náhodná veličina

$\langle M,N\rangle$ je proces!

sto druhý proces!

Poznámka: jsou-li $M, N$ nezávislé martingaly, pak $\langle M, N\rangle = 0$
a $M \cdot N$ je martingal vůči filtraci $\{\mathcal{H}_t\}$, kde $\forall t$ je $\mathcal{H}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^M \cup \mathcal{F}_t^N)$

$\forall F \in \mathcal{H}_s$

$$\int_F M_t N_t \, dP \overset{?}{=} \int_F M_s N_s \, dP$$

stačí pro $F = F_M \cap F_N$ $\quad F_M \in \mathcal{F}_s^M$, $F_N \in \mathcal{F}_s^N$

$$\int_{F_M \cap F_N} M_t N_t \, dP = E\left[\underbrace{M_t \cdot 1_{F_M}} \cdot \underbrace{N_t \cdot 1_{F_N}}\right] = E\left[M_t \cdot 1_{F_M}\right] \cdot E\left[N_t \cdot 1_{F_N}\right]$$

$$= \int_{F_M} M_t \, dP \cdot \int_{F_N} N_t \, dP = \dots \int_{F_M \cap F_N} M_s N_s \, dP$$

$$= \int_{F_M} M_s \, dP \quad = \int_{F_N} N_s \, dP$$