Submartingal (martingal) vůči filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$

rozumíme proces $(X_t, t \in [0,T])$

1) • X je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

2) • $E|X_t| < \infty \quad \forall t \in [0,T]$

3) • $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{\geq} X_s \quad \left(\overset{s.j.}{=} X_s\right) \quad \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$

Ověřujeme-li, že nějaký proces je $\mathcal{F}_t$-submartingal, nesmíme zapomenout na žádnou z podmínek 1), 2), 3). Nespecifikujeme-li filtraci, pak uvažujeme kanonickou filtraci procesu X a bod 1) je splněný z definice

Je-li X $\mathcal{F}_t$-martingal, pak $|X|$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal.

1) X_t je $\mathcal{F}_t$-měř. $\forall t \Rightarrow |X_t|$ je $\mathcal{F}_t$-měř. n. vel.

2) $E|X_t| < \infty$ z předpokladu

3) Jenssenova nerovnost: konvexní funkce φ, $E|\varphi(V)| < \infty$ $(+\, E|V| < \infty)$ pak $E[\varphi(V)|\mathcal{G}] \geq \varphi(E[V|\mathcal{G}])$

Doobův - Meyerův rozklad

X submartingal $\qquad X = M + A \qquad$ M je martingal, A je neklesající a vhodně měřitelný.

Definice 11: (predikatbilita) Buď $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděp. prostor a na něm filtrace $\{\mathcal{F}_t\}$. Prediktabilní σ-algebra $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ (vůči filtraci) je nejmenší σ-algebra obsahující všechny množiny

$$A \times \{0\} \qquad A \in \mathcal{F}_0$$

$$A \times (s, t] \qquad A \in \mathcal{F}_s \qquad 0 \le s < t \le T$$

$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ není pod-σ-alg $\mathcal{F}$, ale $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$

Proces $X = (X_t, t \in [0,T])$ nazveme $\mathcal{F}_t$-prediktabilním, pokud je X měřitelný vůči $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

$$\{(\omega,t) \in \Omega \times [0,T];\ X_t(\omega) \le a\} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Jednodušší $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces je proces typu

$$X_t = \xi_0 \cdot 1[A_0 \times \{0\}] + \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, 1[A_i \times (t_i, t_{i+1}]]$$

kde $A_0 \in \mathcal{F}_0$, $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ a ξ_0 je $\mathcal{F}_0$ měř. n. veličina

a $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} \le T$ $\quad$ ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$ měř. n. veličina

$t \in (t_i, t_{i+1}]$ $\quad X_t(\omega) = \xi_i^{(\omega)} 1_{A_i}(\omega)$ hodnota X je na $(t_i, t_{i+1}]$ známá už v čase t_i PREDIKTABILITA

Tvrzení 12: Buď X $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces. Pak $\forall$ $t>0$ je

X_t $\mathcal{F}_{t-}$ měřitelná náhodná veličina

$\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \Rightarrow X_t$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma\Big(\bigcup_{h>0} \mathcal{F}_{t-h}\Big)$$

$\mathcal{F}_0, \{\mathcal{F}_{t-}, t>0\}$ tvoří filtraci a X je $\mathcal{F}_{t-}$-adapt.

Důkaz: X je měřitelné zobrazení vůči $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

X lze zapsat jako limita vhodných jednodušších zobrazení

$$X^n: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$$

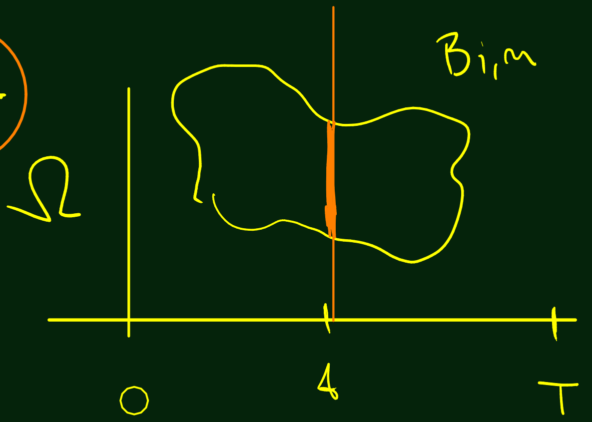
$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k_{i,n}\, \mathbb{1}_{B_{i,n}}(\omega,t) \qquad B_{i,n}\in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$$

$$k_{i,n}\in\mathbb{R}$$

Stačí ukázat, že $\mathbb{1}_{B_{i,n}}(\omega,t)$ je $\mathcal{F}_{t-}$ měřitelné zobrazení $\forall t\in(0,T]$

$$\{\omega;\ \mathbb{1}_{B_{i,n}}(\omega,t)=1\}\in \mathcal{F}_{t-}$$

σ-alg. na Ω



Víme: $B_{i,n}\in\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

Vezmeme libovolnou $B\in\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ a označme B_t její t-řez

$$B_t=\{\omega;\ (\omega,t)\in B\}\in\mathcal{F}_{t-}\ ??$$

Označme $\mathcal{A} = \{B \subset \Omega \times (0,T];\ B_t \in \mathcal{F}_{t-}\}$

σ-algebra $\Rightarrow \mathcal{A}$ je σ-alg.

Obsahuje-li $\mathcal{A}$ množiny generující $\sigma(\mathcal{F}_t)$ máme vyhráno.

$B = A \times (r,s]$ $\quad A \in \mathcal{F}_r$

$$B_t = \begin{cases} \emptyset & t \notin (r,s] \\ A & t \in (r,s] \end{cases}$$

$\emptyset \in \mathcal{F}_{t-} \quad \forall t$

$A \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_{t-}$

$\underline{r < t} \leq s$

$\sigma(\mathcal{F}_t)$ je nejmenší σ-alg. obsahující tyto množiny

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{A}$

$\boxed{\checkmark}$

Tvrzení 13: (spojitost a prediktabilita)

$\{\mathcal{F}_t\}$ filtrace, X zleva spojitý, $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces.

Pak je X $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.

Důkaz: Aproximujeme X posloupností po částech konstantních procesů.

$$X^n_t = \underbrace{X_0}_{\mathcal{F}_0\text{-měř.}} \cdot \mathbb{1}[t=0] + \sum_{i=1}^{2^n} \underbrace{X_{\frac{(i-1)T}{2^n}}}_{\mathcal{F}_{\frac{(i-1)T}{2^n}}} \cdot \mathbb{1}\left(\frac{(i-1)T}{2^n}, \frac{iT}{2^n}\right](t)$$

X^n je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní!

$$\{(\omega,t);\ X_t(\omega)\le a\}$$

$$= \underbrace{\bigcup_{i=1}^{2^n}\{\omega;\ X_{\frac{(i-1)T}{2^n}}(\omega)\le a\}}_{\in \mathcal{F}_{\frac{(i-1)T}{2^n}}} \times \left(\frac{(i-1)T}{2^n}, \frac{iT}{2^n}\right] \cup \underbrace{\{\omega,\ X_0(\omega)\le a\}}_{\in \mathcal{F}_0} \times \{0\} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$$

$$\times \left(\frac{(i-1)T}{2^n}, \frac{iT}{2^n}\right] \qquad \times \{0\}$$

X^n a $X = \lim_{n\to\infty} X^n$ X je také $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$-měřitelné zobrazení.

X je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.