Čítací proces

příklad: Poissonův proces $N = (N_t, t \in [0,T])$

- $N_0 = 0$ s.j.
- $P[N_t - N_s = k] = e^{-\lambda(t-s)} \dfrac{(\lambda(t-s))^k}{k!}$ $k = 0, 1, 2, \dots$

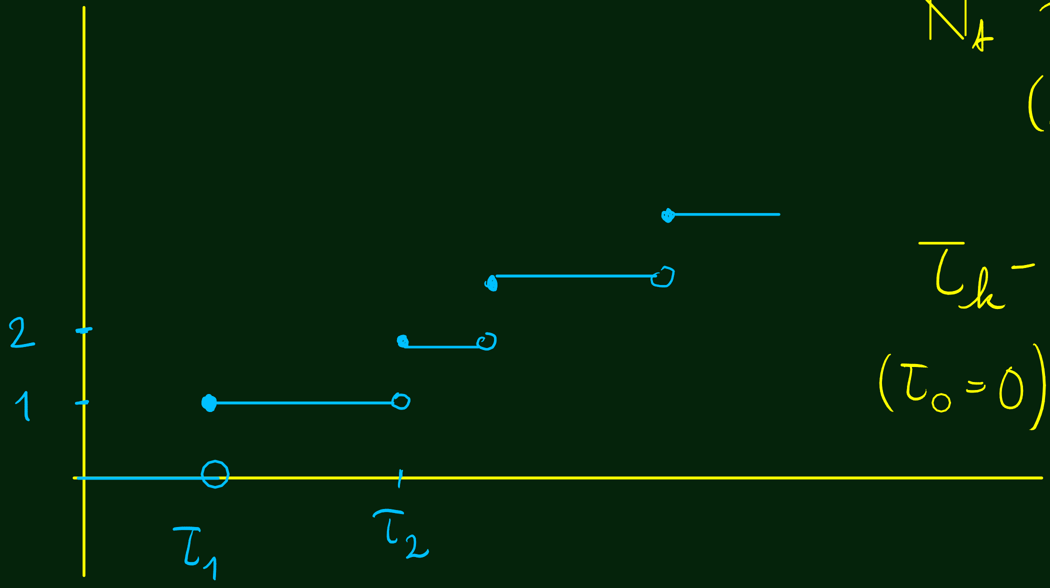
$Po(\lambda(t-s))$ $\underline{\lambda > 0}$

- Přírůstky jsou nezávislé

$N_t - \underline{N_s}$ $N_s - \underline{N_u}$ $u < s < t$

jsou nezávislé

- Trajektorie N jsou zprava spojité (a po částech konstantní)



N_t počet událostí do času t (včetně)

$\tau_k - \tau_{k-1}$ má exponenciální rozdělení s parametrem λ

$(\tau_0 = 0)$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Jedná se o Markovský proces

Poissonův proces s proměnnou intenzitou $\lambda(s)$

- $P[N_t - N_s = k] = \exp\{-(\Lambda(t) - \Lambda(s))\} \dfrac{(\Lambda(t) - \Lambda(s))^k}{k!}$

$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$ $\lambda(s)$ – intenzita rizika v čase s

$\Lambda(t)$ – riziko (kumulativní riziko v čase t)

Λ je spojitá funkce $\lambda \geq 0 \ \forall s$

„kumulativní riziko" „hustota rizika"

je-li $\Lambda(T) < \infty$ je Λ na $[0,T]$ absolutně spojitá

$\int_0^T f(t)\, d\Lambda(t)$ je-li f omezená $= \int_0^T f(t) \lambda(t)\, dt$

Pro Poissonův proces s nekonstantní intenzitou nejsou doby mezi událostmi n. vel. s exponenciálním rozdělením.

T_1 doba 1. události $\quad P[T_1 > t] = P[N_t = 0] = \exp(-\Lambda(t))$

T_2 doba 2. události $\quad P[T_2 > t] = P[N_t \le 1] = P[N_t = 0] + P[N_t = 1]$

$$= \exp(-\Lambda(t)) \cdot \left[1 + \frac{\Lambda(t)}{1}\right]$$

Rozdělení $T_2 - T_1$ musíme odvodit a záviší na času T_1

Pokud by $\underbrace{\Lambda(t)}_{\ge 0}$ bylo malé, pak $\exp(-\Lambda t)$ může být stále blízko 1 a tím pádem s velkou pravděpodobností k události nedojde.

Obecně nezávislost přírůstků platit nemusí.

$U_1, U_2, \dots U_k$ iid $\qquad P[U_i > 0] = 1 \qquad U_i$ jsou spojité n. veličiny

$$N_t = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}[U_i \le t] \qquad N_t - \underbrace{N_{t-}}_{\text{limita zleva}} = N_t - \lim_{s \to t-} N_s \in \{0,1\}$$

$N_0 = 0$

$$\operatorname{cov}(N_s, N_t - N_s) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{K} \mathbb{1}[U_i \le s], \sum_{i=1}^{K} \mathbb{1}[U_i \in (s,t]] \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{K} E\, \mathbb{1}[U_i \le s]\, \mathbb{1}[U_k \in (s,t]] - \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{K} E\, \mathbb{1}[U_i \le s] \cdot E\, \mathbb{1}[U_k \in (s,t]] =$$

$i \neq k$ je nezajímavé

$$= K\left(0 - E\,\mathbb{1}[U_i \le s] \cdot E\,\mathbb{1}[U_i \in (s,t]]\right) = -K \cdot P[U_i \le s]\, P[U_i \in (s,t]]$$

$U_1, \dots, U_k$ časy do změny stavu u k jedinců

Definice 9: (čítací proces) Stochastický proces $N = (N_t, t \ge 0)$ nazveme pro nějakou filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$ – čítacím procesem, pokud

- $N_0 = 0$ s.j.
- $N_t < \infty$ $\forall t \in [0,T]$ s.j.
- N_t má zprava spojité trajektorie, které jsou po částech konstantní

a $N_t - N_{t-} \in \{0,1\}$ s.j. $\forall t$

- N je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný.

Každý proces, který splňuje první tři body je $\mathcal{F}_t^N$-čítací, tedy $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$.

Pokud mluvíme o čítacím procesu, máme na mysli čítací proces vůči své kanonické filtraci, nebo je filtrace zřejmá z kontextu.

Martingaly a submartingaly

__Definice 10:__ Buď X proces typu càdlàg (spojitý zprava s limitou zleva) a $\{\mathcal{F}_t\}$ nějaká filtrace. Proces X je martingal, jestliže

(i) X je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný

(ii) $E|X_t| < \infty \quad \forall t \in [0,T]$

(iii) $E[X_t|\mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{=} X_s \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$

Platí-li (iii') $E[X_t|\mathcal{F}_s] \overset{s.j.}{\geq} X_s \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$

tak mluvíme o submartingalu. ($\leq$ supermartingal)

Martingal

$EX_t = \text{konst.}$

submarti

$EX_t \geq EX_s \quad s \leq t$

superm.

$EX_t \leq EX_s \quad s \leq t$