$a+b=b+a$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Věta 5.12 $\sum a_n = A$ AK $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$

Věta BD 5.13 (Riemann) Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu $s \in \mathbb{R}^*$.

Neboli: $\sum a_n$ K a $\sum |a_n| = +\infty \Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}^* \; \exists$ bijekce $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = s$.

Dk. (idea) $\sum a_n$ K & $\sum |a_n| = +\infty \Rightarrow$

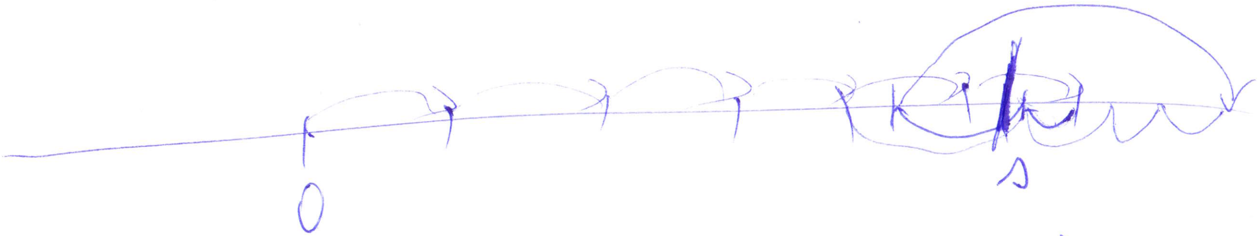
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$

$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$

$a_n^- = \min\{a_n, 0\}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

víme $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.



∞ krát stoupáme -- spotřebujeme všechny a_n, kde $a_n > 0$

∞ krát klesáme -- spotřebujeme všechny a_n, kde $a_n < 0$

tak součet přerovnané řady je „an" blízko s

$\Rightarrow$ součet je s $\square$

$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)\cdot(b_1 + b_2 + \dots) \stackrel{??}{=} a_1 \cdot b_1 + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) +$
$+ (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots$

Def Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. Cauchyovským součinem těchto řad nazveme řadu $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}\cdot b_i\right)$.

$\boxed{\text{Věta T 5.14}}$ (o součinu řad) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně. Pak $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}\cdot b_i\right)$

Př: a) $e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} \stackrel{V5.14}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{x^{k-i}}{(k-i)!}\cdot\frac{y^i}{i!} =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\underbrace{\frac{k!}{(k-i)!\cdot i!}}_{\binom{n}{k}}\cdot x^{k-i}\cdot y^i = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot(x+y)^k = e^{x+y}$

b) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = b_n$ – "Věta neplatí"

$c_k = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-i}}{\sqrt{k-i}}\cdot\frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} = (-1)^k\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{(k-i)\cdot i}}}_{\geq (k-1)\cdot\frac{1}{\frac{k}{2}} = 2\cdot\frac{k-1}{k} \geq 1}$

$\lim_{k\to\infty} c_k \neq 0 \Rightarrow \sum c_k$ D

AG: $\sqrt{(k-i)\cdot i} \leq \frac{(k-i)+i}{2} = \frac{k}{2}$

$\sqrt{a\cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$

$\sum a_n$ AK, $\sum b_n$ AK $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} \cdot b_i \right)$

Dk: Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \xrightarrow{n\to\infty} A \in \mathbb{R}$

$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \xrightarrow{n\to\infty} B \in \mathbb{R}$.

$\rho_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} \cdot b_i \right)$. Chceme $\lim_{n\to\infty} \rho_n = A \cdot B$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_0$ $\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$ a $\sum_{j=n_0}^{\infty} |b_j| < \varepsilon$ (snadno z BC podm.)

a zároveň $|s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - A \cdot B| < \varepsilon$.

Nechť $n \geq 2n_0$, pak

$$|\rho_n - A \cdot B| \leq |\rho_n - s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0}| + |s_{n_0} \cdot \sigma_{n_0} - A \cdot B|$$

$$\leq \Big| \underbrace{(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \dots + (a_{n-1} \cdot b_1 + \dots + a_1 \cdot b_{n-1})}_{\text{sčítáme } a_i b_j \text{ pro } i+j \leq n} - \underbrace{(a_1 + \dots + a_{n_0}) \cdot (b_1 + \dots + b_{n_0})}_{\text{všechny tyto členy } a_i b_j \text{ jsou v } \rho_n \text{ neboť } n \geq 2n_0}\Big| + \varepsilon$$

$1 \leq i \leq n_0$ a $1 \leq j \leq n_0$

$$\leq \sum_{\{i \geq n_0 \text{ nebo } j \geq n_0\}} |a_i b_j| + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=n_0}^{\infty} |b_j| + \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| + \varepsilon = \varepsilon \cdot \text{KONSTANTA}$$

$\square$

5.5. Limita posloupnosti a součet řady v komplexním oboru

$$1 \overset{?}{=} \sqrt{(-1)^2} \overset{?}{=} \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \overset{?}{=} i \cdot i \overset{?}{=} -1$$

$$\sqrt{-1} = \{-i, i\} \ni i$$

Definice: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_n + i b_n$ je komplexní posloupnost. Řekneme, že $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Příklady: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2i}{3+in} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2i}{3+i\cdot n} \cdot \dfrac{3-in}{3-in} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2n+6i-in^2}{9+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{9+n^2} + i \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{6-n^2}{9+n^2} = 0 - i$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cdot \left(\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 + i\cdot 0 = 0$$

Definice Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + i b_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A+iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $q \in \mathbb{C}$, $|q|<1$.

$$\lim_{k\to\infty} q^{k+1} = 0$$

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1-0}{1-q}$$

$$\lim_{k\to\infty} \cancel{|q|^{k+1}}\, q^{k+1} = \lim_{k\to\infty} |q|^{k+1} \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{k+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} |q|^{k+1} \cdot \left(\cos((k+1)\alpha) + i\sin((k+1)\cdot\alpha)\right) = 0$$

$\boxed{\text{Věta L 5.15}}$ (vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady)

Nechť c_n je komplexní ~~řada~~ posloupnost a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje.

Dk: Z BC podmínky pro konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ dostaneme

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m \geq n \geq n_0 \quad \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon,$$

víme $c_n = a_n + i \cdot b_n$. Nyní $\forall m \geq n \geq n_0$

$$\sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{j=n}^{m} |b_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon .$$

tedy $\sum |a_n|$ a $\sum |b_n|$ ~~konver~~ splňuje BC podmínku, a tedy konvergují podle V 5.8.

Podle V 5.9 (vztah K a AK) tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují $\square$

Příklad: a) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$\sum \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum \frac{|z|^n}{n!} \ K \ \forall z \overset{V5.15}{\Longrightarrow} \sum \frac{z^n}{n!} \ K$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ... $\sum |q^n| = \sum |q|^n \underset{|q|<1}{K} \overset{V5.15}{\Longrightarrow} \sum q^n \ K.$

$|q| < 1$

V 5.8 (BC podm.) $\quad \sum a_n \ K \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m \geq n \geq n_0 \quad \left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| < \varepsilon$