$X = \{X_t, t \in [0,T]\}$, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodné veličiny

$X(\omega) : [0,T] \to \mathbb{R}$ trajektorie procesu

$E X_t$

$E \int_0^t X_s \, ds$

Definice 4: Stochastický proces X nazveme

(a) $\mathcal{L}_p$ - omezený, pokud $\sup_{0 \le t \le T} \underbrace{E|X_t|^p}_{\text{dobře definované } \ge 0} < \infty$ $p \ge 1$

(b) omezený, pokud

$\exists K$ takové, že $\{\omega ; \sup_{0 \le t \le T} |X_t(\omega)| \le K\} \in \mathcal{F}$ a $P[\sup_{0 \le t \le T} |X_t| \le K] = 1$

$< \infty$

$$E\int_0^t X_s\,ds = \int_\Omega \int_0^t X_s(\omega)\,ds\,dP(\omega)$$

Definice 5: (měřitelnost procesu a jeho integrovatelnost)

- Proces X nazveme měřitelný, pokud $X:(\omega,t) \longmapsto X_t(\omega)$ je měřitelné, tedy $\{(\omega,t);\ X_t(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

  $\mathcal{F}$: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}[0,T]$

- Měřitelný proces je $\mathcal{L}_p$-integrovatelný, pokud

$$E\int_0^T |X_s|^p\,ds < \infty \qquad p \geq 1 \qquad X \text{ je v } \mathcal{L}_p(P \otimes \lambda_{[0,T]})$$

Věta 6: Zprava spojitý (zleva spojitý) proces má měřitelnou modifikaci.

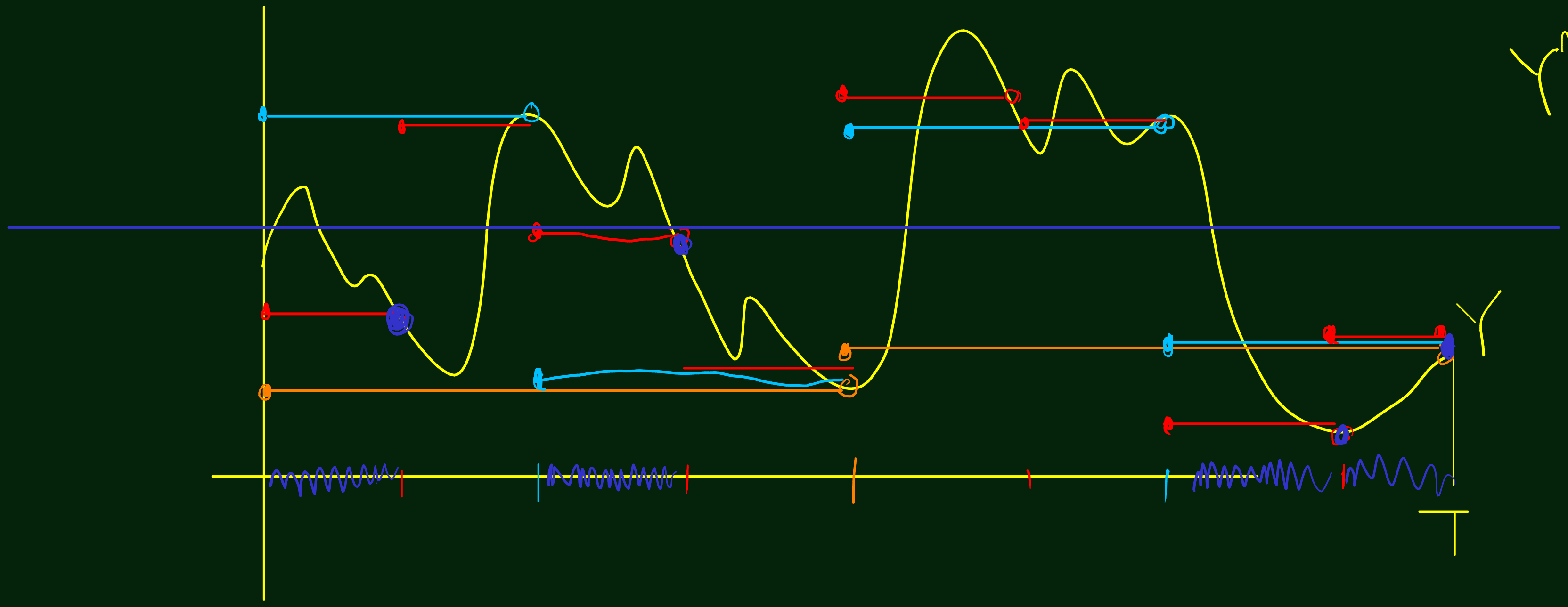
Důkaz: X zprava spojitý. $\exists\, \Omega_c,\ P(\Omega_c)=1$ $\forall \omega \in \Omega_c$ jsou trajektorie X zprava spojité

$$\left.\begin{array}{ll} Y = X & \text{na } \Omega_c \\ Y = 0 & \text{pro } \omega \notin \Omega_c \end{array}\right\} \quad Y \text{ má všechny trajektorie zprava spojité a je modifikací (dokonce ekvivalentní) procesu } X.$$

Zbývá dokázat měřitelnost Y.

$\{(\omega, t);\ Y_t(\omega) \le a\}$. Aproximujme Y po částech konstantními procesy

$$Y^n_t(\omega) = Y_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \quad t \in \left[\frac{(k-1)T}{2^n}, \frac{kT}{2^n}\right) \qquad Y^n_T(\omega) = Y_T(\omega)$$



$$Y^n_t(\omega) \xrightarrow[n \to \infty]{} Y_t(\omega)$$

$\forall t, \omega$

$$\{(\omega,t);\, Y_t^n(\omega)\le a\} = \bigcup_{k=1}^{2^n} \underbrace{\{\omega;\, Y_{\frac{kT}{2^n}}(\omega)\le a\}}_{\in\mathcal{F}} \times \underbrace{\left[\frac{(k-1)T}{2^n}, \frac{kT}{2^n}\right)}_{\in\mathcal{B}} \cup \underbrace{[Y_T\le a]}_{\in\mathcal{F}}\times\underbrace{\{T\}}_{\in\mathcal{B}}$$

$$\in \mathcal{F}\otimes\mathcal{B} \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

Z limitního přechodu plyne, že Y je měřitelný proces a je měřitelnou modifikací X.

Dynamika jevového pole

proces = vývoj v čase. V čase t „víme" co se stalo doposud, ale nevíme s jistotou, co bude v budoucnosti.

<u>Definice 7:</u> Třídu σ-algeber $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ nazveme FILTRACÍ pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pokud

$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \; \forall t$, $\quad \forall s \leq t \;\; \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Filtrace je zprava spojitá, pokud $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{t+h} = \mathcal{F}_t \;\; \forall t \in [0,T)$

a zleva spojitá, pokud $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\left(\bigcup_{h>0} \mathcal{F}_{t-}\right) = \mathcal{F}_t \;\; \forall t \in (0,T]$

$\mathcal{F}_t$ kryje roli jevů, o kterých v čase t můžeme rozhodnout, zda nastaly či nenastaly.

<u>Definice 8:</u> Stochastický proces X je adaptovaný na filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$, pokud $\forall t$ je X_t náhodnou veličinou měřitelnou vůči $\mathcal{F}_t$. $\left(X_t \in \mathcal{F}_t\right)$

$\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t$

Každý proces je adaptovaný na nějakou filtraci

$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(X_s, s \le t\right) \quad t \in [0,T] \qquad \{\mathcal{F}_t^X\}$ tvoří kanonickou filtraci procesu X, zřejmě X_t je $\mathcal{F}_t^X$-měřitelné zobrazení $\sigma(X_t) \subset \sigma\left(X_s, s \le t\right)$

$\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{F}_t^X$ pokud $s \leq t$

$\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_u, u \leq s)$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\underline{X_u, u \leq t})$

σ-algebra nad souborem veličin X_u, $u \in [0,t]$

$\{\mathcal{F}_t^X\}$ je nejmenší filtrace, vůči které je proces X adaptovaný:

X_u je $\mathcal{F}_t^X$ měřitelná $\forall\, u \leq t$

$\mathcal{F}_u^X \subset \mathcal{F}_t^X$

naše znalost v čase t

$E(X_t \mid \mathcal{F}_t^X) = X_t$

známe hodnotu X_t

Filtrace se nazývá úplná (zúplněná), pokud obsahuje všechny P-nulové množiny.

Označme $\mathcal{N} = \{A ; \exists N \in \mathcal{F}, P(N) = 0, A \subset N\}$ P-nulové množiny

$\mathcal{N}_t = \{A ; \exists N \in \mathcal{F}_t, P(N) = 0, A \subset N\}$ P-nulové množiny do času t

$$\mathcal{F}_t^c = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}) \qquad t \in [0,T]$$

(někdy se používá pouze $\mathcal{F}_t^a = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}_t)$ – my budeme používat $\mathcal{F}_t^c$)

Filtrace již od začátku obsahuje všechny P-nulové množiny.

P můžeme rozšířit na $\mathcal{F}_t^0$ tak, že

$\forall A \in \mathcal{F}_t^0$ je $P(A) = P(\tilde{A})$ $\quad \hat{A} \in \mathcal{F}_t$ $\quad \tilde{A} \Delta A = (\hat{A} \setminus A) \cup (A \setminus \tilde{A}) \in \mathcal{N}$

náhodná procházka

$+1$

0

-1

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

$A = [X_1 = 1]$

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, A, A^c, A_{-2}, A_0, A_2, A^c_{-2}, A^c_0, A^c_2, \Omega\}$

A_2

A