$\boxed{V\,5.8}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0,\ n \geq m$ $\left|\sum_{i=m}^{n} a_i\right| < \varepsilon$

$m \leq n$ $a_m, \dots, a_n$, $b_m, \dots, b_n$ $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n$$

$\boxed{\text{Věta T 5.11}}$ (Abel-Dirichletovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní

(D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty,

tedy $\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N}: |S_m| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right| < K$.

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergentní.

Př: " • FAKT $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ má omezené částečné součty

" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ K $b_n = \frac{1}{n}$ $a_n = \sin n$ b_n klesá $\lim_{\infty} b_n = 0$

a_n má omez. č. součty $\xRightarrow{A-D}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ K

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ K $a_n = \cos n$ má omezené č. součty b_n klesá, $\lim b_n = 0$

$\xRightarrow{\text{Abel-Dirichlet}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ K

Dk: Podle V 5.8. budeme ověřovat BC podmínku pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. [4-2]

Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$.

b_n je nerostoucí a $b_n \geq 0 \implies \forall i: b_i - b_{i+1} \geq 0$ a $\exists K \forall n \; |b_n| \leq K$

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\overset{V5.8}{\implies} \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall i \geq m \geq n_0 \quad \left| \sum_{j=m}^{i} a_j \right| < \varepsilon$

$\left| \sum_{j=m}^{i} a_j \right| = |s_i|$

Nyní k $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako výše a nechť $n \geq m \geq n_0$

Abelova sumace

$$\left| \sum_{i=m}^{n} a_i b_i \right| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \, |b_n|$$

$(b_i - b_{i+1} \geq 0)$

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{i=m}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) + \varepsilon \cdot b_n$$

$$= \varepsilon \cdot (b_m - b_n) + \varepsilon \cdot b_n \leq \varepsilon \cdot K + \varepsilon \cdot K = 2K\varepsilon$$

Podle BC podmínky V 5.8 máme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konverguje.

(D): Opět $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Z předpokladů víme, že

$\exists M > 0 \; \forall i \geq m \quad |s_i| \leq M$ (volme $M = 2K$)

Z $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ k $\varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad |b_n| < \varepsilon$. Nyní $\forall n \geq m \geq n_0$

$$\left| \sum_{i=m}^{n} a_i b_i \right| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i (b_i - b_{i+1})| + |s_n| \, |b_n|$$

$$\leq \sum_{i=m}^{n-1} M \cdot (b_i - b_{i+1}) + M \cdot b_n$$

$$= M \cdot (b_m - b_n) + M \cdot b_n \leq M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon$$

Podle BC podmínky V5.8. máme $\sum a_n b_n$ K. $\square$

VÝSLEDKY ZK: SIS ... 145 ... zápočet ... 122 4-3

PÍSEMKA:		$+$	$-$	
1T	114	86	28	75%
2T	28	18	10	64%
3T	7	3	4	43%
		107		

ÚSTNÍ:	1	2	3	Σ
	25	34	43	102

Příklad: 1) a sin n a cos n mají omezené částečné součty

a) $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \underbrace{\qquad}$

b) $\forall x \neq 2k\pi$ $\sin nx$ a $\cos nx$ mají omezené částečné součty

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{i\cdot k\cdot x} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos kx} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin kx}$$

$$\| $$

$$\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-\cos(n+1)x - i\cdot\sin(n+1)x}{1-\cos x - i\sin x} \cdot \frac{1-\cos x + i\cdot\sin x}{1-\cos x + i\cdot \sin x} =$$

B

An

$$= \cancel{\quad} \frac{A_n \cdot B}{(1-\cos x)^2 + (\sin x)^2}$$

$|B| \leq 3$

$|A_n| \leq 3$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \right| = \frac{|A_n|\cdot|B|}{(1-\cos x)^2+(\sin x)^2} \leq \frac{9}{(1-\cos x)^2+(\sin x)^2}$$

✓ $x \neq 2k\pi$ jmenovatel $\neq 0$

5.4. Přerovnání řad a součin řad

Definice Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Př.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ K

$-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{6} \dots$ D

Věta T 5.12 (o přerovnání absolutně konvergentní řady)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ je absolutně konvergentní řada a má stejný součet.

Dk: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ K $\Rightarrow$ ~~splňuje~~ splňuje BC podmínku V 5.8.

Tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \ge m \ge n_0 \quad \left| \sum_{i=m}^{n} |a_i| \right| < \varepsilon$

Limita $\cancel{n} \to \infty$ ($m = n_0$) dá $\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \le \varepsilon$.

Zvolme $n_0' = \max\{\pi^{-1}(1), \pi^{-1}(2), \dots, \pi^{-1}(n_0)\}$. Pak $\forall n' \ge n_0'$ $\pi^{-1}(n') \ge n_0$

$\pi^{-1}(n')$

Tedy $\forall n' \geq m' \geq n_0'$ platí

$$\sum_{j=m'}^{n'} |a_{\pi(j)}| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon$$

Tedy podle BC podmínky VS 8 $\sum |a_{\pi(n)}|$ K $\overset{VS\,9.}{\Longrightarrow} \sum a_{\pi(n)}$ K

Konvergují k stejnému součtu? $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A'$

Víme že $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon$.

Zvolme $n_0' \geq \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n_0)\}$, aby $\sum_{i=n_0'}^{\infty} |a_{\pi(i)}| \leq \varepsilon$

Pak $\underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n_0} a_i - A \right|}_{= \left|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i|} \leq \varepsilon$ a $\left| \sum_{i=1}^{n_0'} a_{\pi(i)} - A' \right| \leq \varepsilon$

Nyní

$$|A - A'| \leq \left| \sum_{i=1}^{n_0} a_i - A \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=1}^{n_0'} a_{\pi(i)} \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_0'} a_{\pi(i)} - A' \right|$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{i \geq n_0} |a_i| + \varepsilon$$

$$\leq 3\varepsilon$$

$\square$