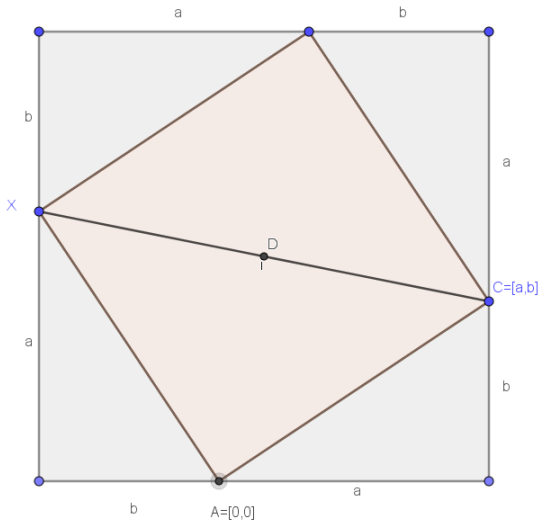
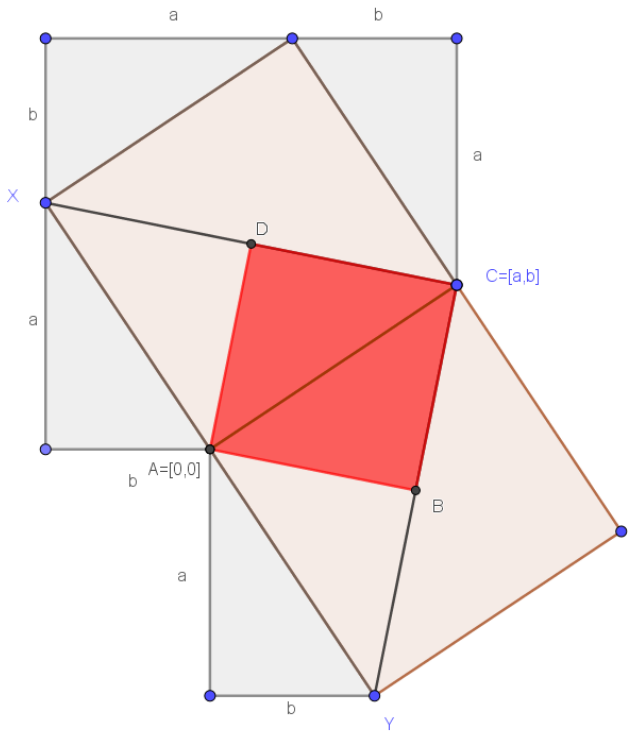
Lukáš Barborka





Na obrázku vidím, že z bodu A =[0,0] se dostanu do budu X tak, že jdu *b* kroků doleva a *a* kroků nahoru. Symbolicky zapsáno:

$$X = A + (-b, a) \Rightarrow X = [-b, a]$$

Předpokládám, že žáci již mají zkušenost se středem úsečky (metodou uvolňování parametrů). Proto symbolicky zapsáno:

$$D = \frac{X+C}{2} = [\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}].$$

Analogicky z bodu A se dostanu do bodu Y tak, že jdu *a* kroků dolů a *b* kroku doprava.

Symbolicky zapsáno: $Y = A + (b, -a) \Rightarrow [b, -a].$

Bod B jako střed úsečky CY: $B = \frac{C+Y}{2} = \left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right].$

Aby body D a B byly mřížové, musí: $a + b \equiv 0\ (mod 2),$

$a - b \equiv 0\ (mod 2),$

což odpovídá $\boldsymbol{a \equiv b\ (mod 2).}$

(Pozn: U žáků na ZŠ samozřejmě nebudeme používat modulární aritmetiku a odvodíme daný vztah pomoci dělitelnosti !).

Př. 2.7: Najděte mřížový bod a mřížovou přímku tak, aby každý čtverec ABCD, jehož bod C leží v mřížovém bode přímky p, byl mřížový.

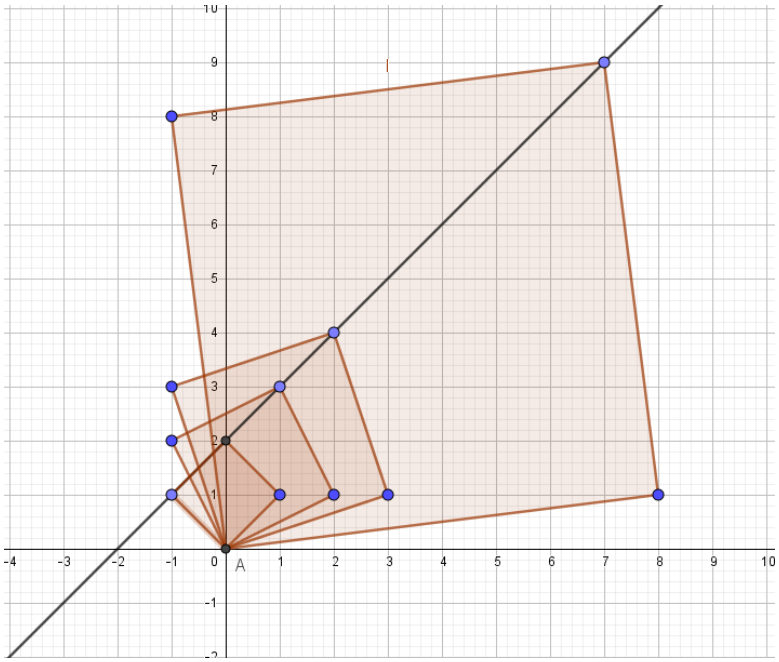
Volme bod A=[0,0].

$y = kx + b$, pak mřížový bod C této přímky lze psát: $C = [x, kx + b]\ k, b \in Z$.

Aby každý čtverec byl mřížový, musí platit: $x \equiv kx + b(mod2)$.

Volme např. k=1 a b=2. Pak platí :

$$x \equiv x + 2(mod2) \Rightarrow 0 \equiv 2(mod2) \Rightarrow 0 \equiv 0(mod2).$$



Př.2.8:Najděte mřížový bod A a mřížovou přímku q tak, aby neexistoval žádný mřížový čtverec ABCD, pro který C leží na přímce q.

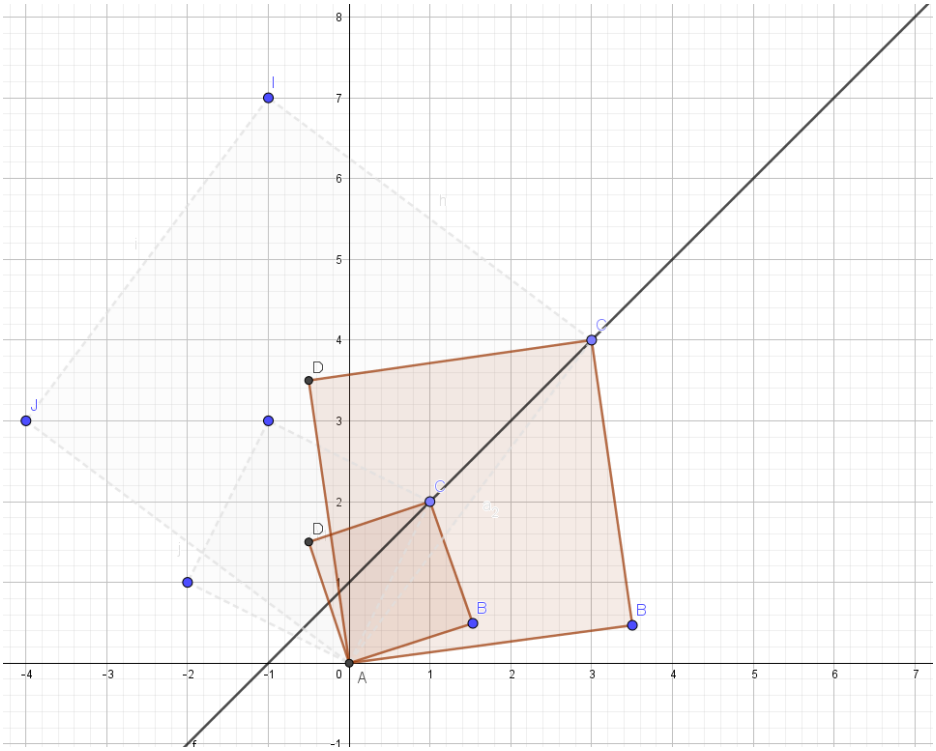
Volíme např. A=[0,0].

$y = kx + b$, pak mřížový bod této přímky lze psát: $C = [x, kx + b]\ k, b \in Z$.

Aby žádný čtverec nebyl mřížový, nesmí pro žádné x platit: $x \equiv kx + b(mod2)$.

Volíme např. k=1, b=1. Pak platí:

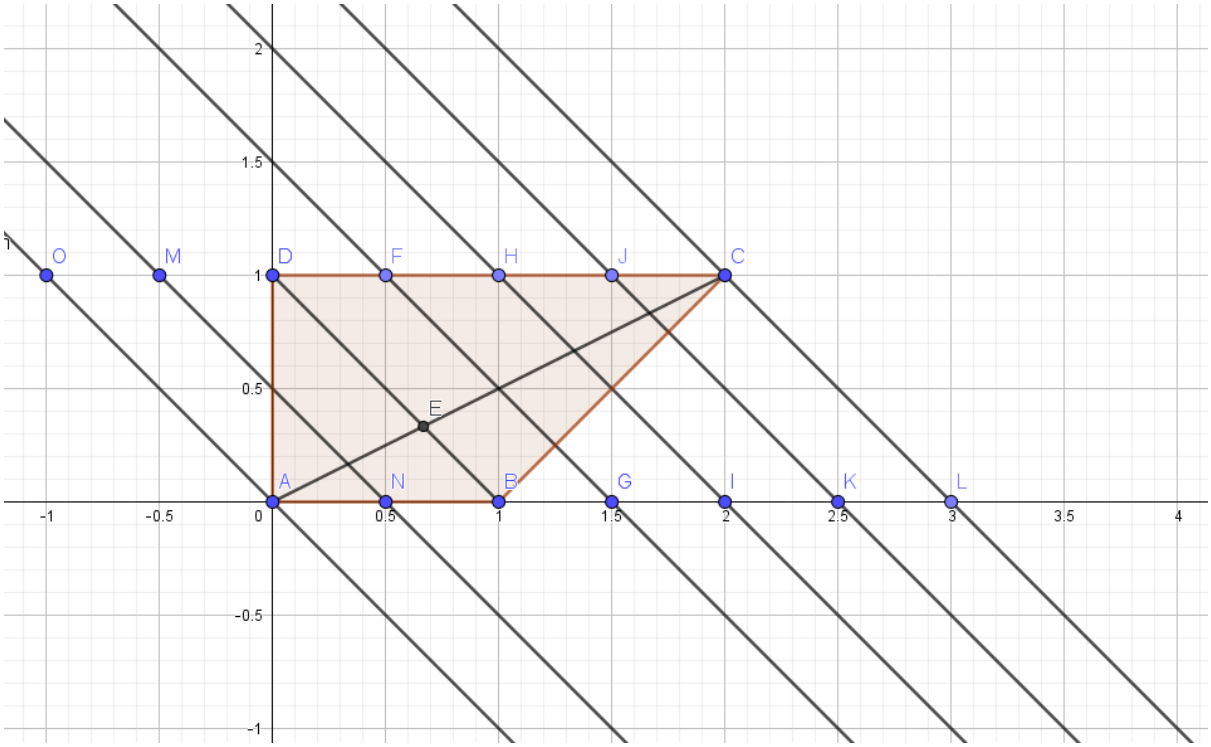
$$x \equiv x + 3(mod2) \Rightarrow 0 \equiv 3(mod2) \Rightarrow 0 \equiv 1(mod2) \ldots . neplatí$$



Př. 2.14: Je dán mřížový čtyřúhelník *ABCD*. Průsečík jeho úhlopříček není bod mřížový. Zvětšete tento čtyřúhelník na mřížový čtyřúhelník *A´B´C´D´* tak, aby i tento průsečík jeho úhlopříček byl bod mřížový. Řešte pro

a) *A*(0,0), *B*(1,0), *C*(2,1), *D*(0,1),

Mřížovými body podstavy AB vedeme osnovu přímek, rovnoběžných s úhlopříčkou BD. Ty nám rozdělí uhlopříčku AC na |AB|+|CD| stejných dílků, tj. 4+2=6.



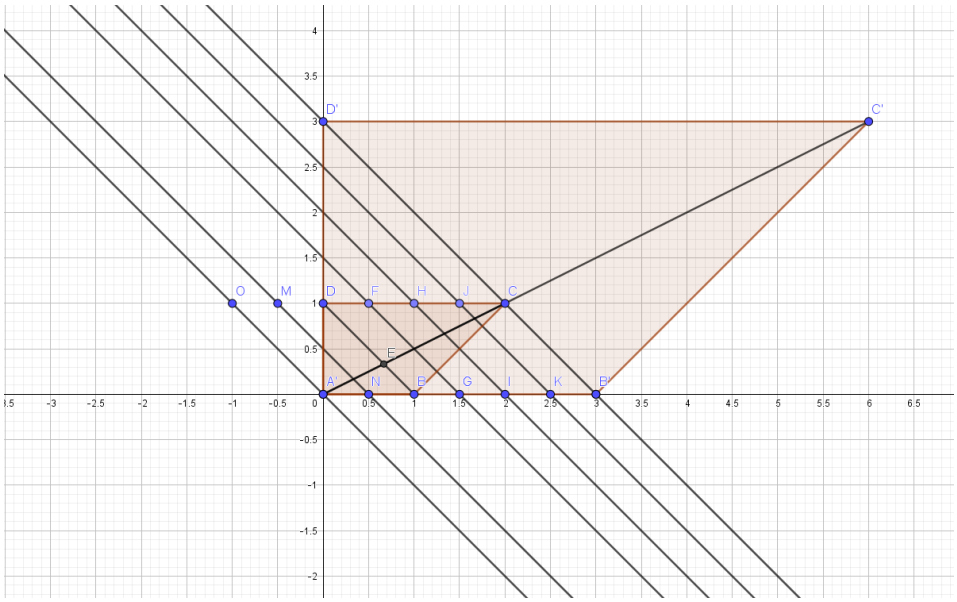
Platí: $$E = A + \frac{2}{6}AC = A + \frac{1}{3}(2,1) = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

Střed zvětšování volme A. Aby bod E byl mřížový, musí platit:

$$2k = 0(mod3),$$

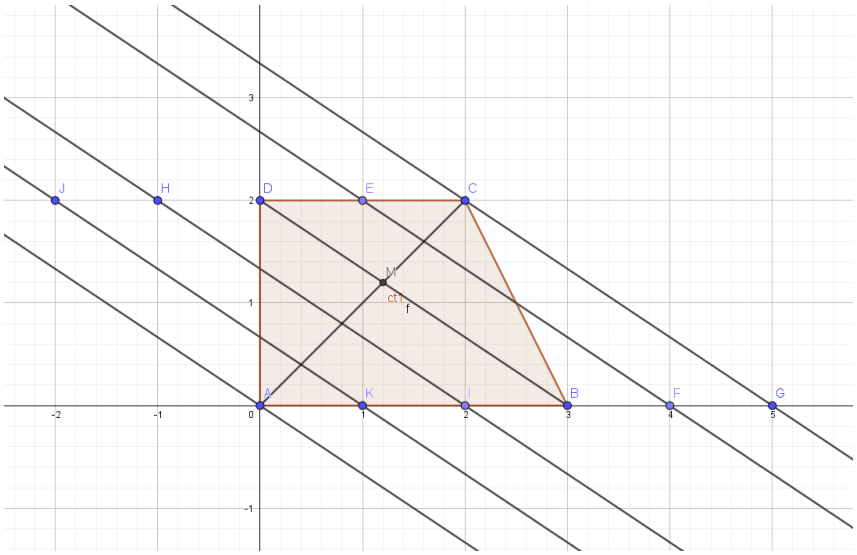
$$k = 0(mod3).$$

Proto je nutné čtyřúhelník ABCD ztrojnásobit, neboť $k = 3t, t \in Z$.



b) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$

Mřížovými body AB a CD vedeme osnovu přímek, rovnoběžných s úhlopříčkou BD. Ty nám rozdělí uhlopříčku AC na |AB|+|CD| stejných dílků, tj. 3+2=5.



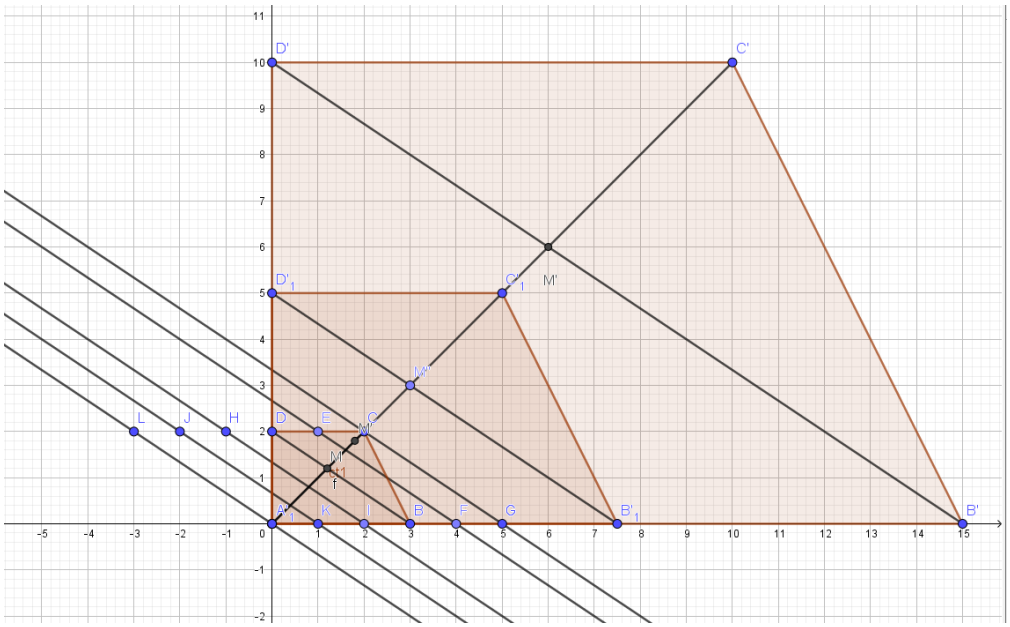
Platí: $$M = A + \frac{3}{5}AC = A + \frac{3}{5}(2,2) = \left[\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right].$$

Střed zvětšování volme A. Aby bod E byl mřížový, musí platit:

$$6k = 0(mod5) \Rightarrow k = 0(mod5),$$

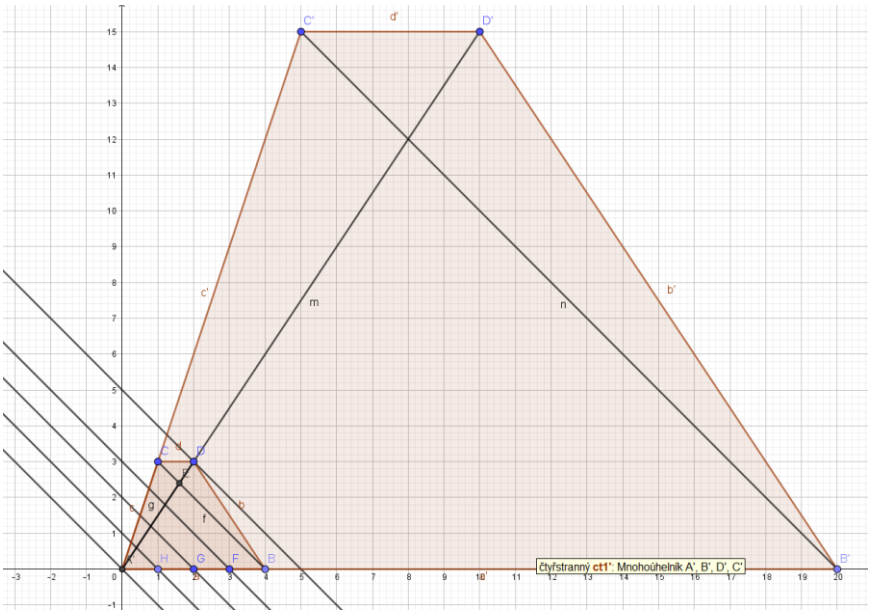
Pokud žádáme celočíselný koeficient zvětšení, je nutné čtyřúhelník ABCD zvětšit 5x, neboť $k = 5t$, $t \in Z$.

Pokud nežádáme koeficient zvětšení $k \in Z$, můžeme v důsledku soudělnosti souřadnic C dělit koeficient k navíc číslem D(2,2)=2. Pak $k = \frac{5}{2}t,\ t \in Z$.



2.17* Najděte mřížový lichoběžník *ABCD*, jehož průsečík úhlopříček je nemřížový bod který se po a) pětinásobném, b) čtyřnásobném zvětšení lichoběžníku stane mřížovým.

a)



Volíme např. A(0,0), B(4,0), C(2,3), D(1,3). Osnova přímek rovnoběžných s BD a vedená mřížovými body stran AB a CD nám ji rozdělí na 5 dílů.

Platí:

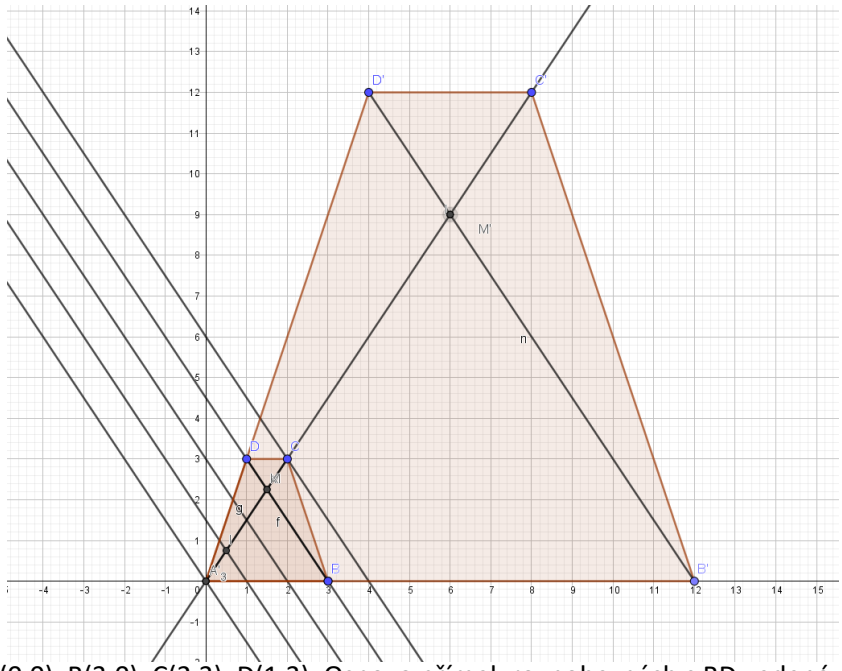
$$E = A + \frac{4}{5}AC = A + \frac{3}{5}(2,3) = \left[\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right].$$

Střed zvětšování volíme A. Aby bod E byl mřížový, musí platit:

$$6k = 0(mod5) \wedge 9k = 0(mod5) \Rightarrow k = 0(mod5),$$

Je proto nutné čtyřúhelník ABCD zvětšit 5x, neboť $k = 5t,\ t \in Z\ a\ D(2,3) = 1.$

b)



Volíme např. A(0,0), B(3,0), C(2,3), D(1,3). Osnova přímek rovnobezných s BD vedená mřížovými body stran AB a CD nám ji rozdělí na 4 díly.

Platí:

$$M = A + \frac{3}{4}AC = A + \frac{3}{4}(2,3) = \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right].$$

Střed zvětšování volme A. Aby bod M byl mřížový, musí platit:

$$3k = 0(mod2) \wedge 9k = 0(mod4) \Rightarrow k = 0(mod4),$$

Je proto nutné čtyřúhelník ABCD zvětšit 4x, neboť $k = 4t,\ t \in Z\ a\ D(2,3) = 1.$

2.18 Je dán mřížový trojúhelník *ABC,* jehož těžiště *T* není mřížový bod. Zvětšete tento trojúhelník na trojúhelník *A´B´C´*, jehož těžiště *T´* je mřížovým bodem. Položme *A*(0,0) a úlohu řešte pro a) *B*(1,0), *C*(0,1), b) *B*(2,0), *C*(0,2), c) *B*(2,0) *C*(1,2), d) *B*(7,1), *C*(1,5).

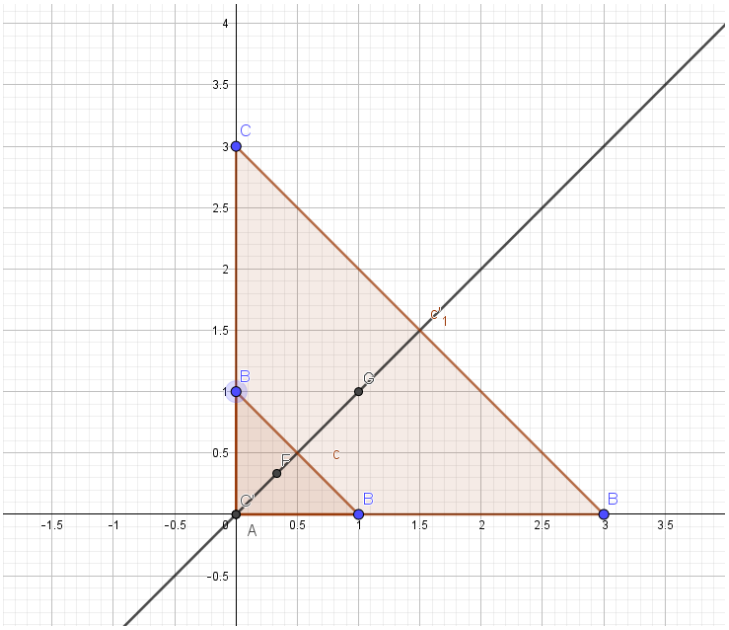
Předpokládejme, že žáci již řešili težiště trojúhelníku (uvolňování parametrů) a znají vztah:

$$T = \frac{A + B + C}{3}.$$

a) A(0,0), *B*(1,0), *C*(0,1)

$$T = \frac{[1,1]}{3} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

Aby T byl mřížový bod po celočíselném zvětšení, musí platit: $k \equiv 0(mod3)$ Proto je potřeba zvětšit daný trojúhelník 3x.

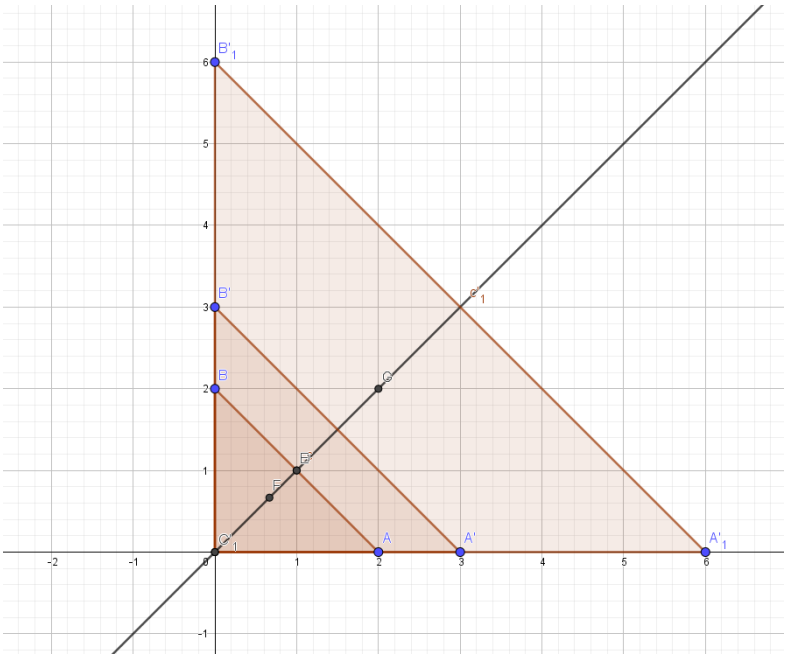


b)A(0,0), *B*(2,0), *C*(0,2)

$$T = \frac{[2,2]}{3} = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

Aby T byl mřížový bod po celočíselném zvětšení, musí platit: $2k \equiv 0(mod3) \Rightarrow k \equiv 0(mod3)$. Proto je potřeba zvětšit daný trojúhelník 3x.

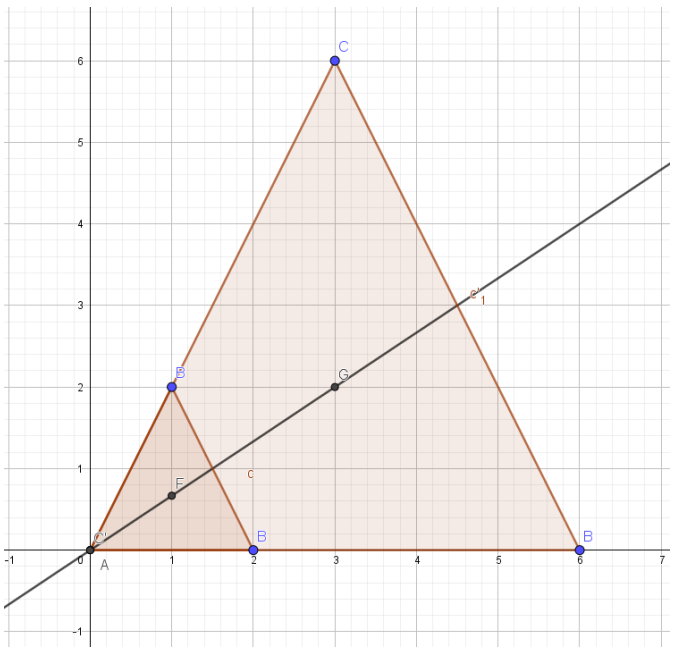
Pokud však nežádáme celočíselné zvětšení, můžeme navíc dělit číslem D(2,2)=2, proto $k = \frac{3}{2}$. V tomto případě zůstavají mřížové i body B a C (souřadnice jsou dělitelné 2).



c) A(0,0), *B*(2,0) *C*(1,2)

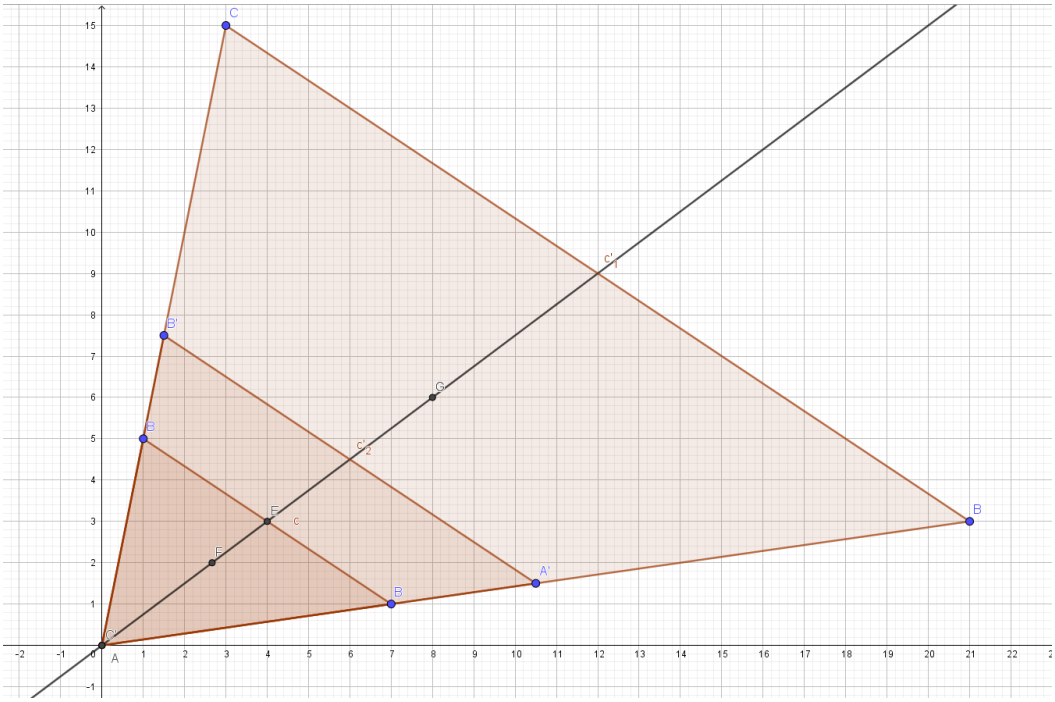
$$T = \frac{[3,2]}{3} = \left[1, \frac{2}{3}\right].$$

Aby T byl mřížový bod po celočíselném zvětšení, musí platit: $2k \equiv 0(mod3) \Rightarrow k \equiv 0(mod3)$. Proto je potřeba zvětšit daný trojúhelník 3x.



d) A(0,0), *B*(7,1), *C*(1,5).

$$T = \frac{[8,6]}{3} = \left[\frac{8}{3}, \frac{6}{3}\right] = [\frac{8}{3}, 2]$$



Aby T byl mřížový bod po celočíselném zvětšení, musí platit: $8k \equiv 0(mod3)$
$\Rightarrow\ 2k \equiv 0(mod3) \Rightarrow k \equiv 0(mod3)$. Proto je potřeba zvětšit daný trojúhelník 3x.

Pokud však nežádáme celočíselné zvětšení, můžeme navíc dělit číslem D(8,6)=2, proto $k = \frac{3}{2}$. V tomto případě však již body B a C nezůstanou mřížové(!), neboť $2 \nmid 7,\ \ 2 \nmid 1,\ \ 2 \nmid 5$.