NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
13. přednáška

Robert Šámal

Porovnání MAP a ML

- Pro připomenutí základní metody bodového odhadu klasické a Bayesovské statistiky
- pro diskrétní veličiny (u spojitých bychom psali f místo p)
- ML (maximální věrohodnost): naměříme hodnotu x, odhadneme hodnotu parametru ϑ tak, aby byla maximální

$$P(X = x; \vartheta)$$

$X \sim F$ F má ~~[illegible]~~ parametr ϑ

- MAP (maximální aposteriori) naměříme hodnotu x, odhadneme hodnotu parametru ϑ (který považujeme za n.v.) tak, aby byla maximální

$$P(\Theta = \vartheta \mid X = x) = \frac{P(X = x \mid \Theta = \vartheta) \cdot P(\Theta = \vartheta)}{\sum_{\vartheta' \in \Theta} P(X = x \mid \Theta = \vartheta') \cdot P(\Theta = \vartheta')}$$

konst. nezávislá na ϑ

$= c \cdot P(\Theta = \vartheta) \cdot P(X = x \mid \Theta = \vartheta)$

Pokud je $P(\Theta = \vartheta)$ stejný pro vš. ϑ (flat prior) $\Rightarrow$

Přehled

Permutační test

Bootstrap

Generování náhodných veličin

Situace

- Máme k dispozici dvě sady nezávislých náhodných veličin (náhodné výběry):
- $X_1, \ldots, X_n \sim F_X$ a $Y_1, \ldots, Y_m \sim F_Y$
- Chceme rozhodnout, zda platí $H_0 : F_X = F_Y$ nebo $H_1 : F_X \neq F_Y$
- Příklady: doba běhu programu před/po vylepšení, hladina cholesterolu u lidí co jedí/nejedí Zázračnou Superpotravu™, frekvenci krátkých slov v textu autora X a Y.
- Nevíme nic o vlastnostech F_X, F_Y (zejména nečekáme, že je normální)

Postup

(pořád. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |X_i - Y_j|$)

- Zvolíme vhodnou statistiku, např.

$$T(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) = |\bar{X}_n - \bar{Y}_m|$$

$X_1 = 1, X_2 = 9, Y_1 = 3$

$t_{obs} = 15 - 31 = 2$

T

193 } 2
913

319 } 7
139

391 } 5
931

$p = \frac{2}{3}$

- $t_{\text{obs}} := T(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$
- Za předpokladu H_0 jsou „všechny permutace stejné“: X_i i Y_j se generovaly ze stejného rozdělení.
- Náhodně zpermutujeme zadaných $m + n$ čísel a pro každou permutaci výčíslíme T – dostaneme $T_1, T_2, \ldots, T_{(m+n)!}$.
- Jako p-hodnotu vezmeme pravděpodobnost, že $T > t_{\text{obs}}$, neboli

$$p = \frac{1}{(m+n)!} \sum_j I(T_j > t_{\text{obs}}).$$

- To je pravděpodobnost chyby 1. druhu, neboli H_0 zamítneme, pokud je $p < \alpha$ (pro naši zvolenou hodnotu α, $= 0.05$) např. $\alpha = 0.05$).

Vylepšení

- Zkoušet všechny permutace může trvat moc dlouho. Vezmeme tedy jen vhodný počet B nezávisle náhodně vygenerovaných permutací a spočítáme jenom B hodnot $T_1, \ldots, T_B$.
- Jako p-hodnotu vezmeme odhad pravděpodobnost, že $T > t_{\text{obs}}$, neboli

$$\underline{\frac{1}{B} \sum_{j=1}^{B} I(T_j > t_{\text{obs}}).}$$

- Pro dostatečně velké m, n dává podobné výsledky jako testy založené na CLV, vhodné je tedy zejména pro středně velké počty.

Přehled

Permutační test

Bootstrap

neparametrické metody

Generování náhodných veličin

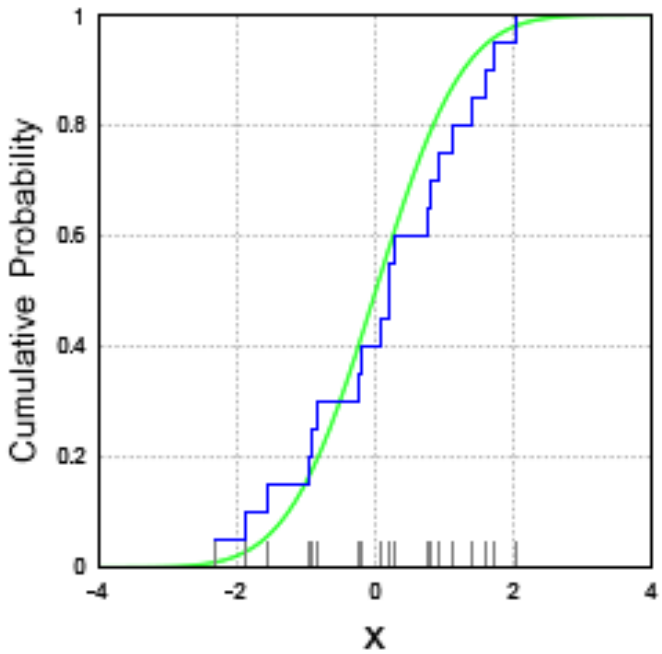
Empirická distribuční funkce – připomenutí

- $X_1, \ldots, X_n \sim F$ n.n.v., F je jejich distribuční funkce
- **Definice:** *Empirická distribuční funkce (empirical CDF)* je definována

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)}{n}, \quad = \frac{\#\, i : X_i \leq x}{n}$$

kde $I(X_i \leq x) = 1$ pokud $X_i \leq x$ a 0 jinak.

(Obrázek vytvořil wiki-editor nagualdesign.)



$|F_n(x) - \hat{F}_n(x)| < \ldots$ → dříve

$\hat{F}_n(x) \to F_n(x)$

→ nahradit F pomocí $\hat{F}_n$

→ E: stř. hodn. $X_1, \ldots, X_n$ = μ závisí na F

$\hat{\mu}$ -"- $\hat{F}$

$\hat{\mu} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \overline{X}_n$

Boostrap – základní idea

- z naměřených dat $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \sim F$ vytvoříme $\widehat{F}_n$
- další data můžeme samplovat z $\widehat{F}_n$
- to se dělá tak, že vybereme uniformně náhodné $i \in \{1, \ldots, n\}$ a řekneme x_i

$\hat{F}_n$ popisuje n.v., které nabývá jen hodnot $x_1, \ldots, x_n$ každé z pravděp. $\frac{1}{n}$.

Bootstrap – základní použití

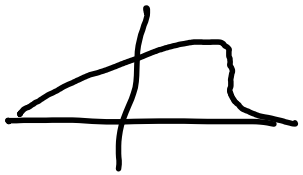
$\bar{X}_n, \hat{S}_n$

- $T_n = g(X_1, \ldots, X_n)$ nějaká statistika (funkce dat)
- chceme odhadnout $var\, T_n$
- nasamplujeme $X_1^*, \ldots, X_n^* \sim \widehat{F}_n$ (viz minulá strana)
- spočteme $T_n^* = g(X_1^*, \ldots, g_n^*)$
- opakujeme B-krát, dostaneme $T_{n,1}^*, \ldots, T_{n,B}^*$
- odhad rozptylu:

koef. lin. regrese

..... šikmost (skew)

$\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^3$



$$\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\Bigg(T_{n,b}^* - \underbrace{\frac{1}{B}\sum_{k=1}^{B} T_{n,k}^*}_{\text{průměr}}\Bigg)^2$$

Přehled

Permutační test

Bootstrap

Generování náhodných veličin

Základní metoda (inverse transformation method)

Věta

Nechť F je rostoucí spojitá funkce s $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
Nechť $U \sim U(0,1)$ a $X = F^{-1}(U)$.
Pak X má distribuční funkci F.

$\left(\begin{array}{l} U : \Omega \to \mathbb{R} \\ X : \Omega \to \mathbb{R} \end{array} \right\}$

- Funguje dobře, když umíme vyčíslit F^{-1}, třeba pro exponenciální rozdělení.
- Gamma rozdělení je součet několika exponenciálních – tak ho tak i vygenerujeme.

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = u$

$\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda x} = 1 - u \qquad x = \boxed{\dfrac{\ln(1-u)}{-\lambda}} \; F^{-1}(u)$

Zamítací metoda (rejection sampling)

(a j^{-1} neumíme rychle počítat)

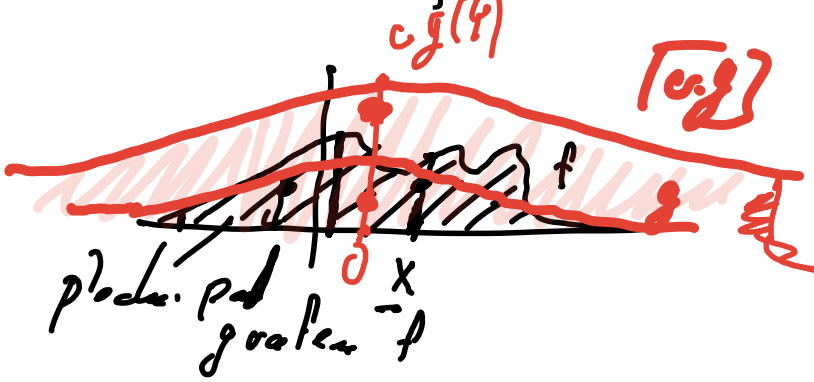
- Chceme vygenerovat n.v. s hustotou f.
- Umíme vygenerovat n.v. s hustotou g (která je „podobná“).
- $\frac{f(y)}{g(y)} \leq c$ pro nějakou konstantu c.

$\boxed{\text{Věta: Takto vygenerujeme n.v. s hustotou } f}$

- Postup
  1. Vygenerujeme Y s hustotou g, a $U \sim U(0,1)$.
  2. Pokud $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$, tak $X := Y$.
  3. Jinak hodnotu Y, U zamítneme a opakujeme od bodu 1.

$Y := y$ s pravd. $\frac{f(y)}{cg(y)} \leq 1$

- Zdůvodnění: vygenerovat náhodnou hodnotu X s hustotou f je totéž, jako vygenerovat náhodný bod pod grafem funkce f, jehož vodorovná (x-ová) souřadnice je X (a svislá je uniformně náhodná mezi 0 a X).



$\boxed{\text{uniformně}}$

$(Y, cg(Y) \cdot U)$

pokud $cg(Y) \cdot U \leq f(Y)$

plocha pod grafem cg

generuj: bod v kruhu:

1) gener. bod ve čtverci

$x, y \sim U(-1, 1)$

2) test, zda je bod uvnitř kruhu:

$x^2 + y^2 > 1 \Rightarrow$ zamítnu

---

geometr. rozd. $P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = p_k \quad i = 1, 2, \dots$

$$p_1 + \dots + p_i = \sum_{k=1}^{i} p(1-p)^{k-1} = \frac{-p(1-p)^i + p}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^i$$

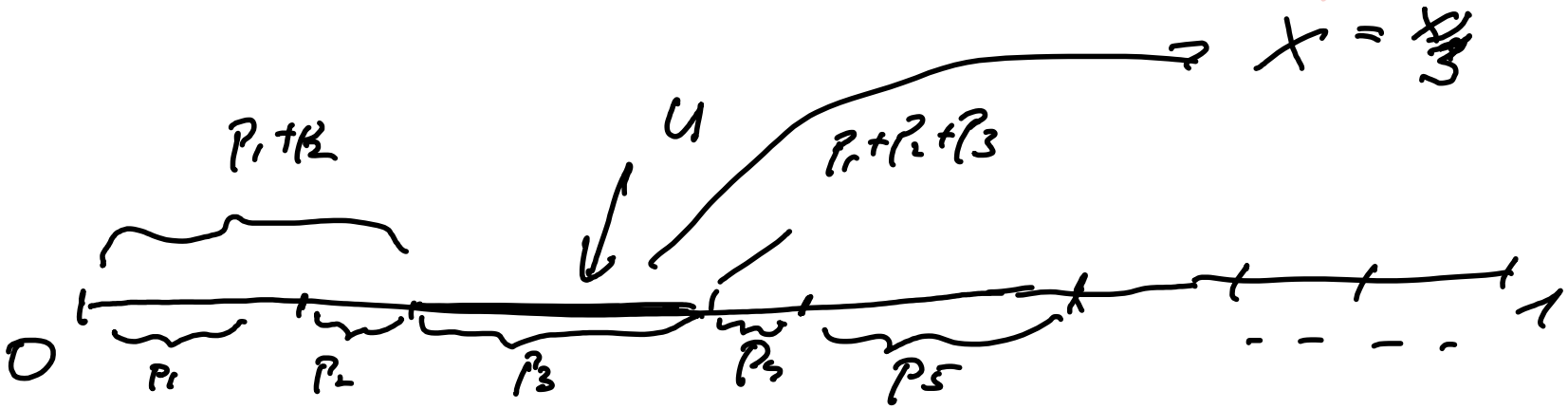
hledáme i: $\quad 1-(1-p)^{i-1} < U < 1-(1-p)^i \qquad i \geq \dfrac{\log(1-U)}{\log(1-p)} > i-1$

$$(1-p)^i < 1-U < (1-p)^{i-1}$$

Varianta základní metody pro diskrétní proměnné

- Chceme n.v. X, která nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots$. ($\sum_i p_i = 1$).
- Vygenerujeme $U \sim U(0,1)$.
- Najdeme i takové, že $p_1 + \cdots + p_{i-1} < U < p_1 + \cdots + p_i$.
- Položíme $X := x_i$.

(pro $i=1$ znamená 0)



- Funguje hezky když máme vzorec pro $p_1 + \cdots + p_i$ (např. geometrické rozdělení).
- Binomické rozdělení je lepší simulovat jako součet n nezávislých Bernoulliových veličin.
- Na další (Poisson) jsou speciální triky).