(1) (a) $P(\text{správně} / \text{umí}) = 1$

$P(\text{správně} / \text{neumí}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{umí}) = \frac{1}{2}$

zadání

$P(\text{umí} / \text{nespráně}) = 0$

$$P(\text{umí} / \text{správně}) = \frac{P(\text{umí}) \cdot P(\text{spr} / \text{umí})}{P(\text{umí}) P(\text{spr} / \text{umí}) + P(\text{neumí}) \cdot P(\text{spr.} / \text{neumí})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

(b) Každá otázka umí s pstí $\frac{1}{2}$, tj.

$U \sim Bin(10, \frac{1}{2})$, nebo

$P(U = k) = \binom{10}{k} \cdot \frac{1}{2^{10}}$

$\mathbb{E}(U) = 5$ $\quad \sigma = 1.6$

$var(U) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.5$

(c) $U / spr. = 6$

$U \sim Bin(6, \frac{3}{4})$, tj. $P(U = k) = P(U = k / spr. = 6) = \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}$

$\mathbb{E}(U / spr. = 6) = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$

$var(U / spr. = 6) = 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{18}{16}$ $\quad \sigma = 1.06$

(2) $P(\Theta = 0.3) = P(\Theta = 0.7) = P(\Theta = 0.95) = \frac{1}{3}$

$$P(\text{umí} \mid \text{správně}) = \frac{\Theta \cdot 1}{\Theta \cdot 1 + (1-\Theta)\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\Theta}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Theta} \qquad P(\text{umí} \mid \text{nesprávně}) = 0$$

$$P(\text{správně}) = \Theta + (1-\Theta)\cdot\frac{1}{3}$$

(a) $S \mid \Theta = p = Binom(10, p + (1-p)\cdot\frac{1}{3})$

$$P(S = k \mid \Theta = p) = \binom{10}{k} \bar{p}^{k} (1-\bar{p})^{10-k}$$

(b) $P(\text{umí} \mid \text{správně}) = \frac{\Theta}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Theta}$ ✓

$$U \mid \Theta = p, S = k = Bin\left(k, \frac{p}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p}\right)$$

$k = 5$

Dáno $k = 5$.

$\Theta \in \{0.3; 0.7; 0.95\}$

MAP: $\max_{\ell} P(U = \ell \mid S = 5)$ být max.

$$P(U=\ell \mid S=5) = \sum_{\theta} P(U=\ell \mid S=5 \wedge \Theta=\theta)\cdot P(\Theta=\theta)$$

$$= \frac{1}{3} P(\ldots \Theta=0.3) + \frac{1}{3} P(\ldots \Theta=0.7) + \frac{1}{3} P(\ldots \Theta=0.95)$$

podm. pravd.

$$\mathbb{E}(U \mid S=5) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(U \mid S=5 \wedge \Theta=0.3) + \frac{1}{3}\mathbb{E}(U \mid \ldots \Theta=0.7) + \frac{1}{3}\ldots$$

(3) a) 1.  2. 

$P(\text{b.m.} / \text{1.kr.}) = \frac{2}{3}$, $P(\text{b.m.} / \text{2.kr.}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{1 kr.}) = p$, $P(\text{2 kr.}) = 1-p$

$$P(\text{1. kr.} / \text{b.m.}) = \frac{P(\text{bm} / \text{1. kr.}) \cdot P(\text{1. kr.})}{P(\text{bm} / \text{1. kr.}) P(\text{1. kr.}) + P(\text{bm} / \text{2. kr.}) P(\text{2. kr.})}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot p}{\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}(1-p)} = \frac{2p}{1+p}$$

Pokud $\frac{2p}{1+p} > \frac{1}{2}$, řekneme 1. kr., jinak 2. kr.

$\Updownarrow$

$4p > 1+p$, $p > \frac{1}{3}$

Pokud $\frac{2p}{1+p} < \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow p < \frac{1}{3}$) ... řekneme vždy 2. kr.

b) $p = \frac{1}{2}$ $P(\text{1. kr.} / \text{b. m.}) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$P(\text{MAP pravidlo dobře}) = P(\text{2. kr. \& bm}) + P(\text{1. kr. \& čm})$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

bez takové znalosti: $P(\text{dobře}) = \frac{1}{2}$

obecně $p\frac{1}{3} + (1-p)\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ... P(dobře algo b.m. → 1. kr., č.m. → 2. kr.)

Pokud $p < \frac{1}{3}$, MAP = vždy 2 kr.

$P(\text{dobře}) = p$