Pro polynomiální matici $\mathbf{G}$ se stupni řádků ν_i definujme *matici nejvyšších koeficientů* $\overline{\mathbf{G}}$ jako matici $b \times c$ nad $\mathbb{F}$, kde $(\overline{\mathbf{G}})_{ij}$ je koeficient u D^{ν_i} v polynomu $\mathbf{g}_i^{(j)}$.

$$G = \begin{pmatrix} \cancel{1+}\,D & \cancel{1}\,D & D \\ \underline{D^2} & \cancel{1+D} & \cancel{1+}\,\underline{D^2} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 - D \cdot g_1 \;\ast \qquad \begin{pmatrix} 1+D & 1 & D \\ D & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále řekneme, že matice **G** má *očekávaný stupeň výstupu*, pokud pro každé $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ platí

$$\deg \mathbf{u}\mathbf{G} = \max_i (\deg \mathbf{u}^{(i)} + \nu_i)\,.$$

$$\left(1 + D + D^3 \quad 1 + D^3\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 + D & 1 & D \\ D^2 & 1 + D & 1 + D^2 \end{pmatrix}$$

4

5 = 4 + 1

5 = 3 + 2

Polynomiální matice se nazývá *redukovaná*, pokud splňuje ekvivalentní podmínky následující věty.

Věta

Nechť je **G** *polynomiální matice* $b \times c$. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

ideg = ideg

1. **G** *má nejmenší vnější stupeň ze všech matic* **TG**, *kde* **T** *je unimodulární.*
2. *Matice nejvyšších koeficientů* $\overline{\mathbf{G}}$ *má hodnost* b.
3. intdeg **G** = extdeg **G**.
4. *Matice* **G** *má očekávaný stupeň výstupu.*

intdeg : max deg|H|

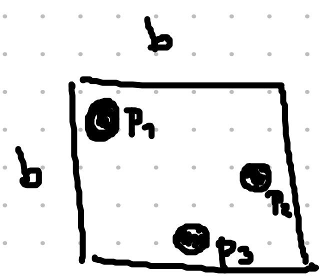
||

extdeg : $\Sigma \underline{\nu_i}$

M .... submatice $b \times b$

$|M|$ .... subdeterm. řádu b

$\operatorname{intdeg} G = \max \deg |M|$



$$\deg |M| \le \operatorname{extdeg} G$$

$$\operatorname{intdeg} G \le \operatorname{extdeg} G$$

$$\deg p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \le \sum \nu_i = \operatorname{extdeg}$$

$$\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3$$

$$\deg \sum_\sigma p_1 p_2 p_3 \le \operatorname{extdeg} G$$

? $\operatorname{intdeg} G < \operatorname{extdeg} G$

$$\deg p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \overset{?}{=} \sum \nu_i$$

$$\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3$$

$$p_1 = \cancel{\ldots} D^{\nu_1}$$

$$= \ldots + ? \, D^{\sum \nu_i}$$

$$\left(\ast |\bar{M}|\right) D^{\sum \nu_i}, \quad |\bar{M}| = 0$$

$\neg(3) \iff \forall M \ |\bar{M}| = 0 \iff \bar{G}$ nemá plnou hodnost $\iff \neg(4)$

$(2) \iff (4)$

$$\begin{array}{c} z_{i_1} \\ z_{i_2} \\ z_{i_3} \end{array} \left(\quad \bar{G} \quad \right)$$

$$\deg u \cdot G \le \max \left(\deg u^{(i)} \cdot \nu_i \right)$$

$$\sum u^{(i)} \cdot g_i$$

$$\sum z_{ij} \bar{g}_{ij} = 0 \qquad \sum u^{(i)}_{m_i} \cdot \bar{g}_i = 0$$

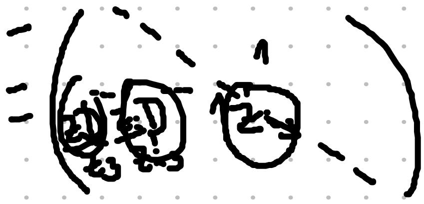
$$\deg \underbrace{\underbrace{\sum z_{ij} D^{\nu_j - \nu_i}}_{u} g_{ij} + \ldots}_{u \cdot G} < \nu_{i_3}$$

(1) ⇒ (2) $\quad [\neg(2) \Rightarrow \neg(1)]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \nu_1 \le \nu_2 \le$$

$$\boxed{\sum z_i \bar{g}_i = 0} \qquad \begin{array}{r} D^{\nu_{i_3}-\nu_{i_1}} z_{i_1} \\ D \, z_{i_2} \\ z_{i_3} \end{array} \begin{pmatrix} - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - \end{pmatrix}$$

$$z_{i_3} g_3 - D^{\cdots} z_{i_2} - D^{\cdots} z_{i_1} \mapsto g_3' \quad \deg < \deg g_3$$



(3) ⇒ (1)

- $|TG| = |T| \cdot |G|$

$$\operatorname{indeg} TG = \underbrace{\deg |T|}_{=0} + \operatorname{indeg} G$$