(1)

Raiffeisen Zentralbank
Österreich AG

RZB

NON UNIQUE ~~..~~ NESS

PŘ. (nejednoznačnost kopuly pro diskrétní rozdělení)
(QRM str. 188)

dvojrozměrné alternativní rozdělení:

$P(X_1=0, X_2=0) = \frac{1}{8}$, $P(X_1=1, X_2=1) = \frac{3}{8}$,

$P(X_1=0, X_2=1) = \frac{2}{8}$, $P(X_1=1, X_2=0) = \frac{2}{8}$.

Platí $P(X_1=0) = P(X_2=0) = \frac{3}{8} \Rightarrow X_1, X_2$ mají stejné rozdělení

Sklarova věta $\Rightarrow P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = C(P(X_1 \leq x_1), P(X_2 \leq x_2))$
pro vš. x_1, x_2 a nějakou kopulu C.

Obor hodnot marg. d.f.: $\mathrm{Range}(F_1) = \mathrm{Range}(F_2) = \{0, \frac{3}{8}, 1\}$

Aby C byla kopulou náh. v. $(X_1, X_2)'$, musí splňovat

$C(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) = \frac{1}{8}$ $\quad (= P(X_1 \leq 0, X_2 \leq 0))$

Takových kopul je nekonečně mnoho.

PŘ. Gaussova kopula

- kopula n.v. $\mathbb{Y} \sim N(\mu, \Sigma)$ = kopula n.v. $\mathbb{X} \sim N(0, R)$,

kde $X_i = \frac{Y_i - \mu_i}{\sqrt{\operatorname{Var} Y_i}}$, $i = 1, \dots, d$,

R .. korelační matice – v případě d-rozměrného norm. rozdělení určuje kopulu jednoznačně:

$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$,

kde Φ_R je d.f. vektoru $\mathbb{X}$ a Φ je d.f. rozd. $N(0,1)$.

②

Raiffeisen Zentralbank
Österreich AG

RZB

speciálně pro d=2 : $R = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, kde

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, X_1} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}\, X_2}}$$ je koeficient lineární korelace.

připomenutí: hustota d-rozměrného norm. rozdělení $N(\mu, \Sigma)$ s regul. var. maticí Σ:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)' \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\},$$

kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$.

Gaussovu kopulu lze vyjádřit integrálem z hustoty rozdělení $N(0, R)$. Ve dvojrozměrném případě (za předp. $|\rho| < 1$):

- $$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi (1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right\} dx_1 dx_2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \right.$$

$$\left. = (x_1 - \rho x_2, -\rho x_1 + x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2 \right)$$

- Speciální případy (d-rozměrné rozdělení):

1) $R = I_d = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$C_{I_d}^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_d)\, dx_1 \dots dx_d = \prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_i)} \varphi(x)\, dx$$

③

Aj. kopula nezávislosti

$$C^{Ga}_{I_d}(u_1,..,u_d) = \prod_{i=1}^{d} u_i$$

2) $R = J_d = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

V tomto případě $\mathbb{X} = (X,..,X)$, $X \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow C^{Ga}_{J_d}(u_1,..,u_d) = P(\Phi(X) \le u_1, ..., \Phi(X) \le u_d)$$

$$= P(X \le \Phi^{-1}(u_1), .., X \le \Phi^{-1}(u_d)) = P(X \le \min(\Phi^{-1}(u_1),..,\Phi^{-1}(u_d))$$

$$= \Phi(\min(\Phi^{-1}(u_1),..,\Phi^{-1}(u_d))) = \min(u_1,..,u_d)$$

Aj. horní Fréchetova mez
(k. komonotónie)

3) (2-rozměrné rozdělení)

$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $(\rho = -1)$

V tomto případě $\mathbb{X} = (X, -X)$, $X \sim N(0,1)$

$$C^{Ga}_{R}(u_1,u_2) = P(\Phi(X) \le u_1, \Phi(-X) \le u_2)$$

$$= P(X \le \Phi^{-1}(u_1), -X \le \Phi^{-1}(u_2))$$

$$= P(-\Phi^{-1}(u_2) \le X \le \Phi^{-1}(u_1))$$

$$= \begin{cases} \Phi(\Phi^{-1}(u_1)) - \Phi(-\Phi^{-1}(u_2)) = u_1 - (1-u_2) = u_1+u_2-1, & \text{pokud } -\Phi^{-1}(u_2) \le \Phi^{-1}(u_1) \\ & \Phi^{-1}(1-u_2) \le \Phi^{-1}(u_1) \\ & u_1+u_2-1 \ge 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$$

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1,\ 0\}$$ tj. dolní F. mez (k. kontramonotónie)

Tj. ve dvourozměrném případě lze chápat Gaussovu kopulu jako „interpolaci" mezi perfektní pozitivní a perfektní negativní závislostí. Míru závislosti vyjadřuje korelační koeficient ρ, $-1 \le \rho \le 1$.

PŘ. Gumbelova kopula

$$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left\{-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right\}$$

$$1 \le \theta \le +\infty$$

1) $\theta = 1$:

$$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$$ kopula nezávislosti

2) $\theta \to +\infty$:

předp. $u_1 < u_2$

$$\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta} = (-\log u_1)\overbrace{\left(1 + \Big(\underbrace{\frac{-\log u_2}{-\log u_1}}_{<1}\Big)^\theta\right)^{1/\theta}}^{\to 1} \xrightarrow[\theta \to \infty]{} -\log u_1$$

tj. „1^0"

$$\Rightarrow \lim_{\theta \to \infty} C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = u_1 = \min\{u_1, u_2\}$$ horní F. mez (komonotónie)

Tj. Gumbelova kopula interpoluje mezi nezávislostí a perfektní pozitivní závislostí. Míru závislosti vyjadřuje parametr θ.

PŘ. Claytonova kopula

$$C_\theta^{cl}(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}, \quad 0 < \theta < +\infty$$

1) $\theta \to +\infty$:

$u_{1,2} \in [0,1]$

předp. $u_1 < u_2$:

$$\left(\left(\frac{1}{u_1}\right)^\theta + \left(\frac{1}{u_2}\right)^\theta - 1\right)^{-1/\theta} = u_1 \Big(1 + \underbrace{\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^\theta}_{\to 0} - \underbrace{u_1^\theta}_{\to 0}\Big)^{-1/\theta} \xrightarrow[\theta\to\infty]{} u_1$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to\infty} C_\theta^{cl}(u_1,u_2) = u_1 = \min(u_1,u_2)$$ horní F. mez (komonotónie)

2) $\theta \to 0$:

$$\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{u_1}\right)^\theta + \left(\frac{1}{u_2}\right)^\theta - 1}\right]^{1/\theta} = \left[\frac{u_1^\theta u_2^\theta}{u_1^\theta + u_2^\theta - u_1^\theta u_2^\theta}\right]^{1/\theta} \xrightarrow{\theta\to 0} u_1 u_2$$

nezávislost

Pr.

$$u^{-\theta} = e^{-\theta \log u} = 1 - \theta \log u + o(\theta), \quad \theta \to 0$$

$$\log C(u_1,u_2) = -\frac{1}{\theta} \log\Big(1 - \theta \underbrace{\log(u \cdot v)}_{\hat{0}} + o(\theta)\Big)$$

$$\log u_1 + \log u_2 = \log u_1 \cdot u_2$$

$\theta \to 0$

& $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$\log(u \cdot v)$

& mbh.

$$\tilde{x} = a \cdot x \to x = \frac{\tilde{x}}{a}$$

$$\frac{\log(1+ax)}{x} \longrightarrow a \cdot \frac{\log(1+\tilde{x})}{\tilde{x}}$$