NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
8. přednáška

Robert Šámal

Přehled

Ještě k limitním větám

Statistika – úvod

Slabý zákon velkých čísel (weak law of large numbers)

nezávislé!

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou n.n.v. se stř. hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

sample mean

$\overline{X}_n$

$$\lim_{n \to \infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

naměřili jsme

skutečnost

Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ v pravděpodobnosti (in probability), píšeme $S_n \xrightarrow{P} \mu$.

Centrální Limitní věta

$Y_n = \frac{(X_1-\mu)+(X_2-\mu)+\dots}{\sqrt{n}}$

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ *jsou n.n.v. se stř. hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2.
Označme $Y_n = ((X_1 + \dots + X_n) - n\mu)/\sqrt{n}$.
Pak $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$. *Neboli, pokud* F_n *je distribuční funkce* Y_n*, tak*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}.$$

Říkáme, že posloupnost Y_n *konverguje k* $N(0,1)$ *v distribuci (in distribution).*

$E X_1 = \mu$

$\mathbb{E}(X_1 - \mu) = 0$ ... cent

Momentová vytvořující funkce

Definice

Pro náhodnou veličinu X označíme

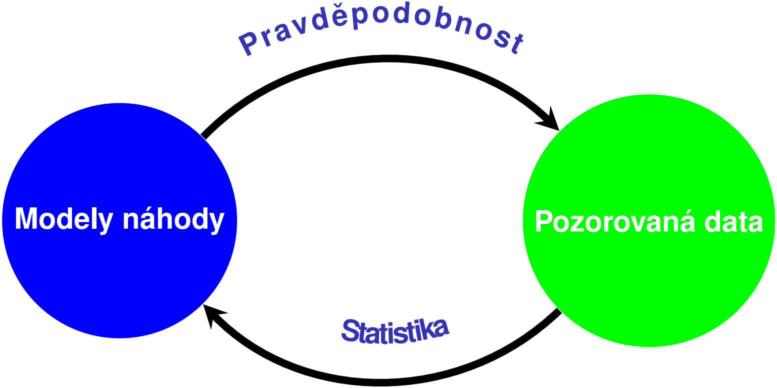
$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Funkci $M_X(t)$ nazýváme momentová vytvořující funkce (moment generating function).

- $M_{Bern(p)}(t) = p \cdot e^t + (1 - p)$.
- $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^n) \frac{t^n}{n!}$.
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$, jsou-li X, Y n.n.v.
- $M_{Bin(n,p)} = (pe^t + 1 - p)^n$
- $M_{N(0,1)} = e^{t^2/2}$
- $M_{Exp(\lambda)} = \frac{1}{1 - t/\lambda}$
- Pokud $M_X(t) = M_Y(t)$ na intervalu $(-a, a)$ pro nějaké $a > 0$, tak je $X = Y$ s.j.

Přehled

Plán přednášky

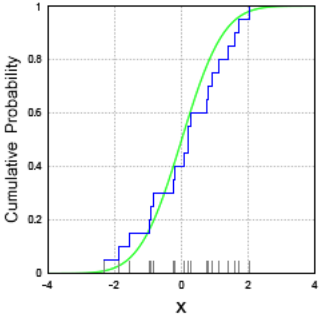


1. ilustrace – počet leváků

2. ilustrace – doba běhu programu

- $X_1, \dots, X_n \sim F$ n.n.v., F je jejich distribuční funkce
- **Definice:** *Empirická distribuční funkce (empirical CDF)* je definována
$$\widehat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)}{n},$$
kde $I(X_i \leq x) = 1$ pokud $X_i \leq x$ a 0 jinak.

(Obrázek vytvořil wiki-editor nagualdesign.)



Empirická distribuční funkce – vlastnosti

Věta

Pro pevné x platí

- $\mathbb{E}(\widehat{F}_n(x)) = F(x)$
- $var(\widehat{F}_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$
- $\widehat{F}_n(x)$ *konverguje k* $F(x)$ *v pravděpodobnosti, píšeme* $\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$.

Důkaz.

Slabý zákon velkých čísel. □

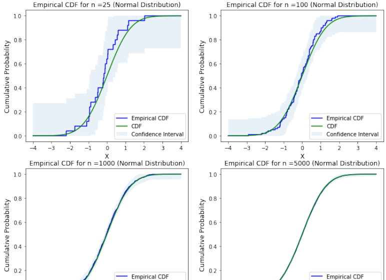
Empirická distribuční funkce – Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz (DKW)

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n \sim F$ *jsou n.n.v.,* $\widehat{F}_n$ *jejich empirická distribuční funkce. Nechť* $\mathbb{E}(X_i)$ *je konečná. Zvolme* $\alpha \in (0, 1)$ *a označme* $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{2}{\alpha}}$. *Pak platí*

$$P(\widehat{F}_n(x) - \varepsilon \leq F(x) \leq \widehat{F}_n(x) + \varepsilon) \geq 1 - \alpha.$$

(Obrázek vytvořil wiki-editor Sivaji12331, $\alpha = 0.05$.)



Další typy zkoumaných problémů

- Je zkoumaný lék účinný?
- Je naše mince, kostka spravedlivá?
- Předpokládáme, že výška člověka je normálně rozdělená. Jaké je μ, σ?
- Předpokládáme, že výška člověka je normálně rozdělená. V jakém vztahu je průměrná výška mužů a žen? Praváků a leváků?
- Jak závisí náklon šikmé věže v Pise na čase?

Zkoumané úlohy – předpoklady

- Vždy předpokládáme, že máme nezávislá měření – hodnoty n.n.v. $X_1, \dots, X_n \sim F$
- O F předpokádáme, že patří do nějakého *modelu* – množiny vhodných distr. funkcí.
- parametrické/neparametrické modely

Zkoumané úlohy – cíle

- bodové odhady
- intervalové odhady
- testování hypotéz
- (lineární) regrese

Bodové odhady a jejich vlastnosti