NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
7. přednáška

Robert Šámal

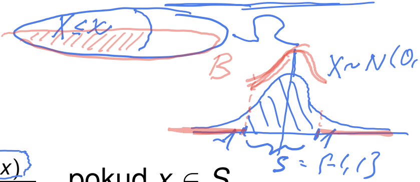
Zápočtová písemka

Zápočtová písemka bude 23.11. a 26.11. během normálního cvičení.
Detaily na cvičení.

Přehled

Podmíněná hustota a střední hodnota

- $F_{X|B}(x) := P(X \le x \mid B)$ … distr. funkce n.v. X zúžené na $B \subseteq \Omega$ $(P(B) > 0)$



- $f_{X|B}$ odpovídající hustota
- pokud $B = \{X \in S\}$, tak

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{P(X \in S)} & \text{pokud } x \in S \\ 0 & \text{jinak } (x \notin S) \end{cases}$$

$P(-1 \le X \le 1) \doteq 0.68$

$f_{X|B} = \dfrac{\varphi}{0.68}$

- $\mathbb{E}(X \mid B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx$

$\mathbb{E}(X|B)$

- $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|B}(x)dx$
- Pokud $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad, tak

$Y(\omega) = i \iff \omega \in B_i$.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X \mid B_i) P(B_i).}$$

$\sum \mathbb{E}(X|Y=i)\,P(Y=i) = \boxed{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))}$

$\mathbb{E}(X|Y)$
$= h(Y)$
$= h(i) = \boxed{\mathbb{E}(X|B_i)}$

Podmíněná hustota a střední hodnota

$B = \{\omega : Y(\omega) = y\}$

$P(B) = 0$

- $f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ je hustota n.v. X, pokud $Y = y$
- $\mathbb{E}(X \mid Y = y) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$ je střední hodnota této veličiny

  → věta
- $\mathbb{E}(g(X)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$
- $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X \mid Y = y) f_Y(y)dy$$
- $\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y))}$

$h(y)$ pro nějakou fci h

$\mathbb{E}(X|Y) := h(Y)$ ... náh. vel.!

$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y) dy \overset{\text{LOTUS}}{=} \mathbb{E}(h(Y))$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x f_{X|Y}(x,y) f_Y(y)}\, dx\, dy$

$\iint x \cdot f_{X,Y}(x,y)$

$g(x,y)$

Přehled

Cauchyho nerovnost

a kon. rozptyl

Věta

Nechť X, Y mají konečnou střední hodnotu a ~~nechť g~~ je ~~konvexní reálná funkce~~. Pak

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

$\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}(XY)$ je skal. součin na vekt. prostoru všech n.v. na Ω

$\langle X, X\rangle \geq 0$ "$\mathbb{E}(X^2)$"

$\langle X, X\rangle = 0 \iff X = 0$ s.j.

$Z = X - tY$ $\quad 0 \leq \mathbb{E}Z^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2tXY + t^2Y^2) = \mathbb{E}X^2 - 2t\,\mathbb{E}XY + t^2\,\mathbb{E}Y^2$

$\Rightarrow$ polynom 2. st. v t má ≤ 1 kořen

$\Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0$

- Důsledek pro korelaci: $-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathbb{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sqrt{\mathbb{E}(X-\mu_X)^2 \cdot \mathbb{E}(Y-\mu_Y)^2}} \leq 1$$

Jensenova nerovnost

$g'' \geq 0$

Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu a nechť g je konvexní reálná funkce. Pak

$$\mathbb{E}(g(X)) \geq \underline{g(\mathbb{E}(X))}.$$

(Pro konkávní platí opačná nerovnost.)

$g(x) = x^2$

$\mathbb{E}(X^2) \geq (\mathbb{E}X)^2$

$\operatorname{var} X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$

$\boxed{\text{Dk}}$

díky konvexitě

$\forall s \ \exists a, b : \quad ax + b \leq g(x) \quad \& \quad \underline{as + b = g(s)}$

$g(X(\omega)) \geq a X(\omega) + b$

použijte pro $s = \mathbb{E}X$

$g(x) \geq ax + b \implies g(X) \geq aX + b$

$\underline{\mathbb{E}g(X)} \geq \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}X + b = as + b = g(s)$

$= \underline{g(\mathbb{E}X)}$ $\blacksquare$

Markovova nerovnost

$a = t \cdot \mathbb{E}X$

$P(X \geq t\mathbb{E}X) \leq \frac{1}{t}$

$t = 2$

Věta n.v.

Nechť $X \geq 0$. Pak

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

$\boxed{\text{Dk}}$ $I = [X \geq a]$ = indikátor. n.v. $\begin{cases} 1 & \text{když } X \geq a \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$\mathbb{E}(I) = P(X \geq a)$

$\omega \in \Omega$: $X(\omega) \geq a$: $1 \leq \frac{X(\omega)}{a}$

$X(\omega) < a$: $0 \leq \frac{X(\omega)}{a}$

$I \leq \frac{X}{a}$

$\mathbb{E}I \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{\mathbb{E}X}{a}$

$\blacksquare$

Čebyševova (Chebyshev) nerovnost

ff

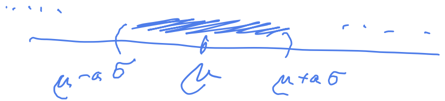
Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Pak

$$P(|X-\mu| \geq a \cdot \sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

$a=1 \quad \leq 1$

$a=3 \quad \leq \frac{1}{9}$



$P(|X-\mu| < 3\sigma) \geq \frac{8}{9} \doteq 0.88$

$\boxed{\text{Dk}}$

$Y = (X-\mu)^2 \geq 0$

$EY = \operatorname{Var} X = \sigma^2$

$P(|X-\mu| \geq a\sigma) = P\left(Y \geq (a\sigma)^2\right) \leq \frac{EY}{a^2\sigma^2} = \frac{1}{a^2}$ ∎

Chernoffova (Černovova) nerovnost

Věta

Nechť $\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} X_i}$, *kde* X_i *jsou n.n.v. nabývající hodnot* ± 1 *s pravděpodobností* $1/2$. *Pak pro* $t > 0$ *platí*

$$P(X \leq -t) = P(X \geq t) \leq e^{-t^2/2\sigma^2}, \quad \ll \frac{\sigma^2}{t^2}$$

kde $\sigma = \sigma_X = \sqrt{n}$.

Chebyshev

Bez dk.

Přehled

Silný zákon velkých čísel (strong law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ *jsou n.n.v. se stř. hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2*. Označme* $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *tzv. výběrový průměr (sample mean). Pak platí*

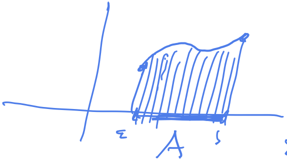
$$\lim_{n \to \infty} S_n = \mu \quad \textit{skoro jistě (tj. s pravděpodobností 1).}$$

$$P(\{\underline{\omega} : \lim S_n = \mu\}) = 1$$

Říkáme, že posloupnost S_n *konverguje k* μ *skoro jistě (almost surely).*

Monte Carlo integration

Jak spočítat $\int_{x \in A} g(x)dx$?

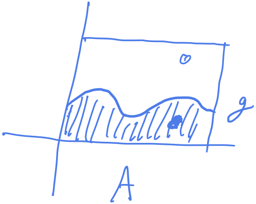


1) $[G]_a^b$

2) aprox. obd.

3) M.C.

$0 \le g(x) \le 1$



$I_1, I_2, \dots\dots$

$EI = P((X,Y)$ je pod křivkou$) = |A|$

náh. gen. (X,Y)

$X \sim U(0,1)$

$Y \sim U(0,1)$

pokud $Y \le g(X)$ ..... $+1$

$Y > g(X)$ 0

$S_n = \frac{I_1 + \dots + I_n}{n}$ SZVČ $\Rightarrow$ $S_n \to \int g(x)$

Slabý zákon velkých čísel (weak law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou n.n.v. se stř. hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ v pravděpodobnosti (in probability).

Dk
$$P\left(|S_n - \mu| > \frac{\varepsilon}{\sigma_n}\cdot\sigma_n\right) \le \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_n}\right)^2} = \frac{(\sigma_n)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

$$\sigma_n^2 = \operatorname{var} S_n = \frac{n\cdot\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathbb{E} S_n = \frac{n\cdot\mathbb{E} X_1}{n} = \mu$$

Čebyšev

$\blacksquare$

Centrální Limitní věta

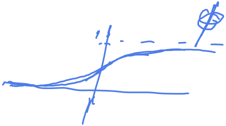
$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \to \mu$$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \to 0$$

$$Y_n = n^{1/2}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right) \to 0 \quad ?$$

$$X_1 + \dots + X_n - \mu n \not\to 0$$

Centrální Limitní věta



Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $Y_n = ((X_1 + \cdots + X_n) - n\mu)/\sqrt{n}$.

Pak $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$. Neboli, pokud F_n je distribuční funkce Y_n, tak

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)} \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}.$$

Říkáme, že posloupnost Y_n konverguje k ~~μ~~ $N(0,1)$ v distribuci (in distribution).

$$P(a \le Y_n \le b) \to \boxed{\Phi(b) - \Phi(a)}$$

$$\left(\sigma_{X_1+\dots+X_n} = \sqrt{n}\right)$$

$$a \le \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \le b$$

$$\mu + \frac{a}{\sqrt{n}} \le \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \le \mu + \frac{b}{\sqrt{n}}$$

Momentová vytvořující funkce (Bonus)

Definice

Pro náhodnou veličinu X označíme

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right).$$

Funkci $M_X(t)$ nazýváme momentová vytvořující funkce (moment generating function).

- $M_{Bern(p)}(t) = p \cdot e^t + (1 - p)$.
- $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^n) \frac{t^n}{n!}$.
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$, jsou-li X, Y n.n.v.
- $M_{Bin(n,p)} = (pe^t + 1 - p)^n$
- $M_{N(0,1)} = e^{t^2/2}$
- $M_{Exp(\lambda)} = \frac{1}{1 - t/\lambda}$
- Pokud $M_X(t) = M_Y(t)$ na intervalu $(-a, a)$ pro nějaké $a > 0$, tak je $X = Y$ s.j.