NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1
7. přednáška

Robert Šámal

Zápočtová písemka

Zápočtová písemka bude 23.11. a 26.11. během normálního cvičení.
Detaily na cvičení.

Přehled

Podmíněná hustota a střední hodnota

- $F_{X|B}(x) := P(X \leq x \mid B) \ldots$ distr. funkce n.v. X zúžené na $B \subseteq \Omega$, potřebujeme $P(B) > 0$.
- $f_{X|B}$ odpovídající hustota
- pokud $B = \{X \in S\}$, tak

$$f_{X|B}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X \in S)} & \text{pokud } x \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X \mid B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x) dx$
- $\mathbb{E}(g(X)|B) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|B}(x) dx$
- Pokud $B_1, B_2, \ldots$ je rozklad, tak

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X \mid B_i) P(B_i).$$

Podmíněná hustota a střední hodnota

- $f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ je hustota n.v. X, pokud $Y = y$
- $\mathbb{E}\big(X \mid Y = y\big) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$ je střední hodnota této veličiny
- $\mathbb{E}\big(g(X)|Y = y\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X|Y}(x,y)dx$
- $$\mathbb{E}\big(X\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}\big(X \mid Y = y\big) f_Y(y)dy$$
- $\mathbb{E}\big(X\big) = \mathbb{E}(\mathbb{E}\big(X \mid Y\big))$

Přehled

Cauchyho nerovnost

Věta

Nechť X, Y mají konečnou střední hodnotu a rozptyl. Pak

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

- Důsledek pro korelaci: $-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$

Jensenova nerovnost

Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu a nechť g je konvexní reálná funkce. Pak

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) \geq g(\mathbb{E}(X)).$$

(Pro konkávní platí opačná nerovnost.)

Markovova nerovnost

Věta

Nechť náhodná veličina X spolňuje $X \geq 0$. Pak

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Čebyševova (Chebyshev) nerovnost

Věta

Nechť X má konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Pak

$$P(|X - \mu| \geq a \cdot \sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

Chernoffova (Černovova) nerovnost

Věta

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *kde* X_i *jsou n.n.v. nabývající hodnot* ± 1 *s pravděpodobností* $1/2$. *Pak pro* $t > 0$ *platí*

$$P(X \leq -t) = P(X \geq t) \leq e^{-t^2/2\sigma^2},$$

kde $\sigma = \sigma_X = \sqrt{n}$.

Bez dk.

Přehled

Dokončení k spojitým vektorům

Nerovnosti

Limitní věty – aproximace

Silný zákon velkých čísel (strong law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou n.n.v. se stř. hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ tzv. výběrový průměr (sample mean). Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mu \quad \textit{skoro jistě (tj. s pravděpodobností 1).}$$

Říkáme, že posloupnost S_n konverguje k μ skoro jistě (almost surely).

Monte Carlo integration

Jak spočítat $\int_{x \in A} g(x) dx$?

Slabý zákon velkých čísel (weak law of large numbers)

Věta

Nechť $X_1, \dots, X_n$ *jsou n.n.v. se stř. hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2*. Označme* $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$*. Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Říkáme, že posloupnost S_n *konverguje k* μ *v pravděpodobnosti (in probability).*

Centrální Limitní věta

Centrální Limitní věta

Věta

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou n.n.v. se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme $Y_n = ((X_1 + \cdots + X_n) - n\mu)/\sqrt{n}$.

Pak $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$. Neboli, pokud F_n je distribuční funkce Y_n, tak

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) \quad \textit{for every } x \in \mathbb{R}.$$

Říkáme, že posloupnost Y_n konverguje k μ v distribuci (in distribution).

Momentová vytvořující funkce

Definice

Pro náhodnou veličinu X označíme

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Funkci $M_X(t)$ nazýváme momentová vytvořující funkce (moment generating function).

- $M_{Bern(p)}(t) = p \cdot e^t + (1-p)$.
- $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^n) \frac{t^n}{n!}$.
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$, jsou-li X, Y n.n.v.
- $M_{Bin(n,p)} = (pe^t + 1 - p)^n$
- $M_{N(0,1)} = e^{t^2/2}$
- $M_{Exp(\lambda)} = \frac{1}{1-t/\lambda}$
- Pokud $M_X(t) = M_Y(t)$ na intervalu $(-a, a)$ pro nějaké $a > 0$, tak je $X = Y$ s.j.