Zajištění škodního nadměrku (EXCESS OF LOSS REINS.) "XL"

$\{N_t\}$ … náhodný Poissonův proces s int. λ

$\{X_k\}$ … posl. i.i.d. náhodných veličin, $X_k > 0$ s.j.

Nezávislé!

- $S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k$ je složený Pois. proces

  $\left(\sum_1^0 = 0\right)$

S_t je (časově) homogenní proces s nezávislými přírůstky.

Def. charakteristické funkce:
$$\varphi(u) = E e^{iuX_k}$$
$$\psi_t(u) = E e^{iuS_t}$$

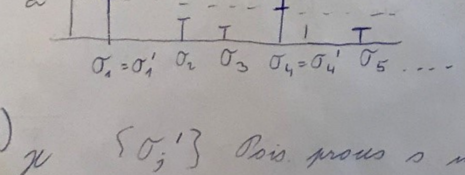
$$\psi_t(u) = E e^{uiS_t} = E e^{iu\sum X_k} = \sum_{n=0}^{\infty} E e^{iu\sum_{k=1}^{n} X_k} P(N_t = n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E e^{iunX_k} \cdot P(N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(E e^{iuX_k}\right)^n \cdot \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varphi(u)\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t} = e^{\lambda t \cdot (\varphi(u) - 1)}$$

EXCESS OF LOSS (XL)
"PER RISK"

Př. Plnění zajistitele vrstvy $(a, a+L)$ při zajištění škodního nadměrku: $\boxed{\text{PRIORITY}}$/RETENTION, $\boxed{\text{LAYER}}$ (OF REINS.) $a > 0$, $L > 0$

$$Y = g(X) = (X-a)_+ - (X-(a+L))_+$$

Dokažte, že $S_t' = \sum_{k=1}^{N_t} g(X_k)$ je složený Pois. proces



$$S_t' = \sum_{k=1}^{N_t'} Y_k > 0 \text{ s.j.}$$

1) je $\{\sigma_j'\}$ Pois. proces s intenzitou $\lambda' = P(X_k > a) \cdot \lambda$?

… vyšetříme doby mezi událostmi.

$\tilde{\tau}' = \sigma_{j+1}' - \sigma_j'$, kde

$\sigma_j' = \sigma_k$

$\sigma_{j+1}' = \sigma_{k+N}$ ... N je náhodná veličina s geometrickým rozdělením s parametrem:

$$p = P(X_k > a), \quad q = 1 - p$$

$$P(N = n) = q^{n-1} \cdot p$$

Tedy $\tau' = \sigma_{k+N} - \sigma_k$.

$h(t) = ?$ ... hustota τ' ; víme, že hustota τ : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$h(t)$ ... hustota $\sigma_N - \underset{\overset{\|}{0}}{\sigma_0}$ = hustota $\tau_1 + \dots + \tau_N$

$\underbrace{g(t|N=n)}$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \cdot f^{*n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot \lambda \cdot \frac{(q \lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda t} =$$

$$= p\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{q \lambda t} = \underline{p\lambda \cdot e^{-\lambda p t}}$$

~ exponenciální rozdělení s param. λp. ✓

---

2) $$P(Y_{j+1} \leq y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \cdot P(Y_{j+1} \leq y \mid \sigma_{j+1}' = \sigma_{k+n}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\text{"}- \cdot P(g(X_{k+n}) \leq y \mid \underbrace{X_{k+1} \leq a, \dots, X_{k+n-1} \leq a}_{\text{nezávislé s } X_{k+n}}, X_{k+n} > a)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \cdot P(g(X) \leq y \mid X > a)$$

! $\Rightarrow$! $P(Y_{j+1} \leq y) = P(g(X) \leq y \mid X > a)$

1) & 2) $\Rightarrow$ ✓

Nechť X má pro $X > a$ Paretovo rozdělení:

$$P(X > x \mid X > a) = \left(\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}, \quad x > a$$

Distr. fce Y pro $0 \le y \le L$

$$P(Y \le y) = P(X - a \le y \mid X > a) = 1 - \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-\alpha}$$

$$x \le y + a$$

$P(Y \le L) = 1$ ... useknuté Paretovo rozdělení

→ parameter estimation $\alpha = ?$

Chceme odhadnout parametry: [théta]

Mějme složený P.p. $\{\{N_t\}, \{Y_k\}\}$, kde $\{N_t\}$ má int ν

a $P(Y \le y) = 1 - \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-\alpha}, \quad 0 \le y \le L$

$P(Y \le L) = 1$

$$S_t = \sum_{k=0}^{N_t} Y_k, \quad t \ge 0$$

Z pozorování škodních úhrnů $S_1, S_2 - S_1, \dots, S_n - S_{n-1}$ je třeba odhadnout neznámé parametry α, ν metodou max. věrohodnosti. Navrhněte numerický výpočet Newton-Raphsonovou metodou založený na Panjerově formuli.

PANJEROVA FORMULE = rekurentní formule pro výpočet složeného rozdělení:

$p_k = P(Y = k) \quad k = 1, \dots, \dots$ (celočíselné hodnoty)

$g_k = P(N = k), \quad k = 0, 1, \dots$

$f_k = P(S = k), \quad k = 0, 1, \dots$

Vytvořující funkce psti:

$$P(x) = E x^X = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k \qquad F(x) = G(P(x))$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

Logaritmická derivace

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G'(P(x)) \cdot P'(x)}{G(P(x))}$$

Nechť $N \sim Po(v)$; rekurentní vyjádření:

$p_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, M$, $p_k = 0$, jinak (! uzavřené rozdělení X!)

$$g_k = P(N = k) = \frac{v^k}{k!} e^{-v}$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k}{k!} e^{-v} \cdot x^k = e^{v \cdot (x-1)}$$

$$G'(x) = e^{v \cdot (x-1)} \cdot v$$

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \underline{\underline{v}} \quad \dots \text{ v libovolném } x!$$

$$\Rightarrow F'(x) = v \cdot F(x) \cdot P'(x)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^{k-1} \cdot k = v \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{M} p_j \cdot x^{j-1} \cdot j\right)$$

Porovnáme koef. u stejných mocnin:

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^{k-1} \cdot k = v \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{M \wedge k} f_{k-j} \cdot p_j \cdot j \cdot x^{k-1},$$

$$\text{tedy } f_k = \frac{1}{k} \cdot v \sum_{j=1}^{M \wedge k} f_{k-j} \, p_j \cdot j$$

MIN

$$f_0 = P(S = 0) = P(N = 0) = e^{-v}$$

Nyní nahradíme rozdělení n.v. Y rozdělením Y'

... interval rozdělíme na M dílků velikosti $\Delta = \frac{L}{M}$

/ zaokrouhlíme Y nahoru na násobky Δ.

- $p_k(\alpha) = P(Y' = k\Delta) = P(Y \in ((k-1)\Delta, k\cdot\Delta)) =$

závisí na parametru

$$= P(Y > (k-1)\Delta) - P(Y > k\Delta) =$$

$$= (1 + (k-1)\Delta/a)^{-\alpha} - (1 + k\Delta/a)^{-\alpha}$$

$$k = 1, \dots, M-1$$

- $p_M(\alpha) = P(Y' = L = M\Delta) = P(Y \geq (M-1)\Delta) =$

$$= (1 + (M-1)\Delta/a)^{-\alpha}$$

$$P(S_1 = k\Delta) = f_k(\alpha, v)$$

f_k určíme z p_j: $\quad f_k = \frac{v}{k} \cdot \sum_{j=1}^{M \wedge k} f_{k-j}\, p_j \cdot j$

$$k = 1, 2, \dots$$

Pozorování $S_1, S_2 - S_1, \dots$

ozn. n_k ... četnosti hodnot $k \cdot \Delta$ (zaokrouhlených) v pozorování

$k = 0, 1, \dots$

Věrohodnostní funkce: $\quad l(\alpha, v) = \prod_k f_k(\alpha, v)^{n_k}$

Logaritmická věr. fce: $\quad \mathcal{L}(\alpha, v) = \sum_k n_k \cdot \log f_k(\alpha, v)$

Odhady nalezneme pomocí: $\hat{\alpha}, \hat{v}$: $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}(\hat{\alpha}, \hat{v}) = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\hat{\alpha}, \hat{v}) = 0$$

Newtonova metoda:

$f(x) = 0$, najdi takové x

iteračně $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

1D

$0 = f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\nabla f = 0$:

XD: $\nabla f(x) = 0$:

$x_1 = x_0 - H^{-1}(x_0) \nabla f(x_0)$

$H = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{x_0}$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(\lambda, v) \doteq \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(\lambda_0, v_0) + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \mathcal{L}(\lambda_0, v_0) \cdot (\lambda - \lambda_0) + \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial v} \mathcal{L}(\lambda_0, v_0) \cdot (v - v_0)$$

analogicky

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L}(\lambda, v) \doteq \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L}(\lambda_0, v_0) + \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial v} \mathcal{L}(\lambda_0, v_0)(\lambda - \lambda_0) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathcal{L}(\lambda_0, v_0)(v - v_0)$$

Maticový odhad:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & H & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L} \\ \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{L} \end{pmatrix}$$

... iteračně

Potřebujeme spočíst derivace:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} f_n(\lambda, v) = ?$$

$$f_n^{(\lambda,v)} = \frac{v}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n \wedge M} f_{n-j}(\lambda, v)\, p_j(\lambda) \cdot j$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial \lambda} = \frac{v}{n} \cdot \sum_j \Big[f_{n-j}(\lambda, v) \cdot p_j'(\lambda) \cdot j + \frac{\partial}{\partial \lambda} f_{n-j}(\lambda, v) \cdot p_j(\lambda) \cdot j \Big] =$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial v} \overset{\text{* def. } f_n}{=} \underline{\frac{1}{v} f_n(\lambda, v)} + \frac{v}{n} \cdot \sum_j \frac{\partial f_{n-j}(\lambda, v)}{\partial v} \cdot p_j(\lambda) \cdot j$$

2. parc. der.:

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial^2 \lambda} = \frac{v}{n} \sum_j \Big[\underline{\frac{\partial f_{n-j}(\lambda, v)}{\partial \lambda}} \cdot p_j' \cdot j + f_{n-j}\, p_j'' \cdot j + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} f_{n-j} \cdot p_j\, j + \underline{\frac{\partial}{\partial \lambda} f_{n-j} \cdot p_j' \cdot j} \Big]$$

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial v^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial f_n}{\partial v} - \cancel{\frac{f_n}{v^2}} + \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_j \frac{\partial f_{n-j}}{\partial v} \cdot p_j \cdot j}_{} + \frac{v}{n} \cdot \sum_j \frac{\partial^2 f_{n-j}}{\partial v^2} \cdot p_j \cdot j \quad \overset{*}{=} \frac{1}{v} \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial v} f_n - \frac{f_n}{v} \Big)$$

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial \lambda\, \partial v} = \frac{\partial^2 f_n}{\partial v\, \partial \lambda} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial \lambda} + \frac{v}{n} \cdot \sum_j \Big[\frac{\partial^2 f_{n-j}}{\partial \lambda\, \partial v} p_j \cdot j + \frac{\partial f_{n-j}}{\partial v} \cdot p_j' \cdot j \Big]$$

Př.

Odhad parametrů porovnáním kvantilů (α) (DP Zavarová)

– mějme pozorování n.v. $\{Y_k\}$ s useknutým Paretovým rozd.

$$P(Y_k > y) = \left(\frac{a}{a+y}\right)^{\alpha} \quad 0 \le y < L \qquad P(Y_k = L) = \left(\frac{a}{a+L}\right)^{\alpha}.$$

Z pozorování $\{Y_k\}$ sestavíme empirickou d.f.

Navrhnout metodu odhadu param. α proložením d.f.

dvěma kvantily y_δ, y_ε a určit vhodná ε a δ.

$$F(y_\delta) = \delta = P(Y \le y_\delta) = 1 - \left(\frac{a}{a+y_\delta}\right)^{\alpha}$$

$$1-\delta = \left(\frac{a}{a+y_\delta}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad y_\delta = a \cdot (1-\delta)^{-\frac{1}{\alpha}} - a$$

$$y_\varepsilon = a \cdot (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} - a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_\delta}{y_\varepsilon} = \frac{(1-\delta)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1}{(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1}$$

tj. nezávisí na a !!!

$$\Rightarrow \quad \frac{y_\delta}{y_\varepsilon} \cdot (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} - (1-\delta)^{-\frac{1}{\alpha}} + 1 - \frac{y_\delta}{y_\varepsilon} = 0$$

$\delta = 0{,}5 \to$ medián, $\varepsilon = 0{,}75 \Rightarrow$ horní kvartil : SUBST. $x := 0{,}5^{-\frac{1}{\alpha}}$

$$\frac{y_\delta}{y_\varepsilon} \cdot x^2 - x + 1 - \frac{y_\delta}{y_\varepsilon} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2\frac{y_\delta}{y_\varepsilon}} = \frac{1 \pm \left(2 \cdot \frac{y_\delta}{y_\varepsilon} - 1\right)}{2 \cdot \frac{y_\delta}{y_\varepsilon}} = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \alpha = \infty \\ \frac{y_\varepsilon}{y_\delta} - 1 & \Rightarrow 0{,}5^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{y_\varepsilon}{y_\delta} - 1 \end{cases}$$

$$D = 1 - 4\frac{y_\delta}{y_\varepsilon} \cdot \left(1 - \frac{y_\delta}{y_\varepsilon}\right)$$

$$\alpha = \frac{-\log 0{,}5}{\log(y_\varepsilon / y_\delta - 1)}$$ ✓