1) $$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-(k+x)^2\right) = f(x).$$ Je f spojitá na $\mathbb{R}$?

Bodová konvergence:

Fixujme $x \in \mathbb{R}$. $f_k(x) = \exp\left(-(k+x)^2\right) \geq 0$

i.e. limita ex.

Zvolme $k_0 > |x|$. Pak pro $n > k_0$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} \exp\left(-(x+k)^2\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0} \exp\left(-(x+k)^2\right)}_{A}$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{n} \exp\left(-(x+k)^2\right) \leq A + \sum_{k=k_0+1}^{n} \exp\left(-(k-k_0)^2\right)$$

$\left[\begin{array}{c} k+x \geq k-|x| \geq k-k_0 \\ \text{exp je rostoucí} \end{array}\right]$

$[\, l = k - k_0 \,]$

$$= A + \sum_{l=1}^{n-k_0} \exp\left(-(l)^2\right) < A + \sum_{l=1}^{\infty} \exp(-l^2)$$

$$< \infty$$

Stejnoměrná konvergence:

Fix $\varepsilon \in (0,1)$, $K_0 \in \mathbb{N}$, zvolím $x = -k_0 - 1$, $k = k_0$

Pak $\left| f(x) - \sum_{i=0}^{k} f_i(x) \right| = \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i(x) \geq$

$\sum f_k(x)$ $_{j...}$ Ak

$$\geq f_{k+1}(x) = \exp\left(-(k+1+x)^2\right) =$$

$$= \exp\left(-(k+1-k-1)^2\right) = 1 > \varepsilon.$$

Tedy jsme dokázali, že $\sum f_n$ nekonverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Zvolme $i \in \mathbb{N}$ lib. a uvažme $[-i, +\infty) = I_i$

Ukážeme, že $\sum f_k \rightrightarrows$ na I_i

pro $\forall x \in I_i$ $\forall n > i$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) =$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left(-(x+k)^2\right) \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\left(-(k-i)^2\right)$$

$[x + k \geq k - i]$

$(l = k - i)$

$$= \sum_{l = n - i + 1}^{\infty} \exp(-l^2) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\underbrace{}_{} \quad \| \quad a_n$$

Chci $\Rightarrow$: Zvolím $\varepsilon > 0$. Naleznu $n_0 > i$ aby $\forall n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon$. Pak $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| < a_n < \varepsilon$

pro $\forall x \in I_i$.

Postřehneme, že f je spojitá na I_i pro $\forall i \in \mathbb{N}$. Z toho plyne, že f je spojitá na $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2}$. Vyšetřete spojitost a derivaci na $\mathbb{R}$.

Bodová konvergence:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{|x|}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = x \quad \in \mathbb{R}, \ \sum \frac{1}{k^2} \to$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \to \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Stejnoměrná konvergence:

Fix $\varepsilon \in (0,1)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ lib. $x = (k_0+1)^2$, $k = k_0$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \right| = \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i(x) \geq f_{k+1}(x)$$

$\sum f_i(x)$ je Ak

$$= \frac{x}{(k_0+1)^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $\sum f_k \not\rightrightarrows \mathbb{R}$. Obdobné jako v předchozím případě $\sum f_k \rightrightarrows$ na $[-i, i]$ pro $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\left[\sup_{x \in [-i,i]} |f_k(x)| = \frac{i}{k^2} \text{ a } \sum \frac{i}{k^2} \to \right]$$

Postáváme, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.

Zvolme $i \in \mathbb{N}$, budeme pracovat na $(-i, i) =: I_i$

- $\forall k \in \mathbb{N}$ je $f_k'(x) = \frac{1}{k^2}$ na I_i
- $\sum f_k \to$ bodově na $\mathbb{R}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} f_k' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightrightarrows$ na I_i

$\Rightarrow$ Podle odpovídající věty má f na I_i vlastní derivaci a platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Dohromady dostáváme $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ na $\mathbb{R}$.