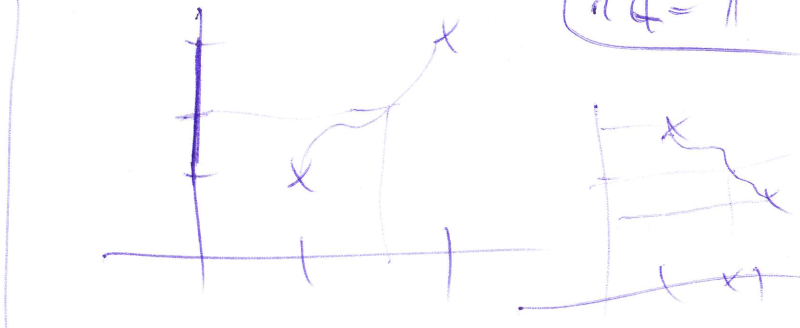
Věta T3.10 (spojitost funkce a nabývání extrémů)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Pak funkce f nabývá na $[a,b]$ svého maxima a minima.



Dk: Označme $G = \sup f([a,b])$.

Z definice suprema $\exists\, y_n \in f([a,b])$ tak, že $y_n \xrightarrow{n\to\infty} G$.

Z definice $f([a,b])$ $\exists\, x_n \in [a,b]$ $f(x_n) = y_n$.

Podle V 2.11. (Bolzano-Weierstrass) $\exists\, x_{n_k} \to x^* \in [a,b]$

($x^* \in [a,b]$ díky uzavřenosti)

Podle Heineho věty V3.1 (pro spojitost)

$$x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \overset{V3.1}{\Longrightarrow} f(x_{n_k}) = y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f(x^*).$$

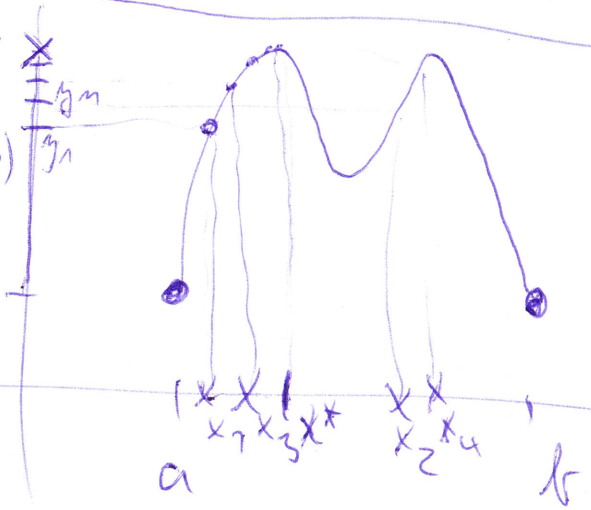
Ale $y_n \to G \overset{V2.3.}{\Longrightarrow} y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} G$.

Tedy $G = f(x^*) \Rightarrow$ v x^* je nabyto maximum.

Minimum lze udělat analogicky. $\square$

RECALL: Heine pro spojitost

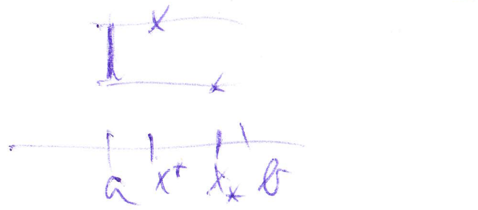
$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*) \iff \forall\, x_n \to x^*,\ f(x_n) \to f(x^*).$$



RECALL: V2.11.

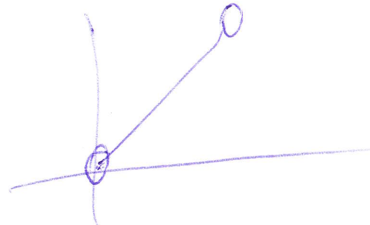
Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důsledek: Nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Pak je funkce f na $[a,b]$ omezená.

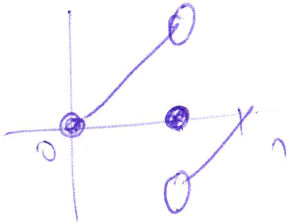


Příklady: a) $f(x)=x$ na $(0,1)$

f nenabývá maxima ani minima.



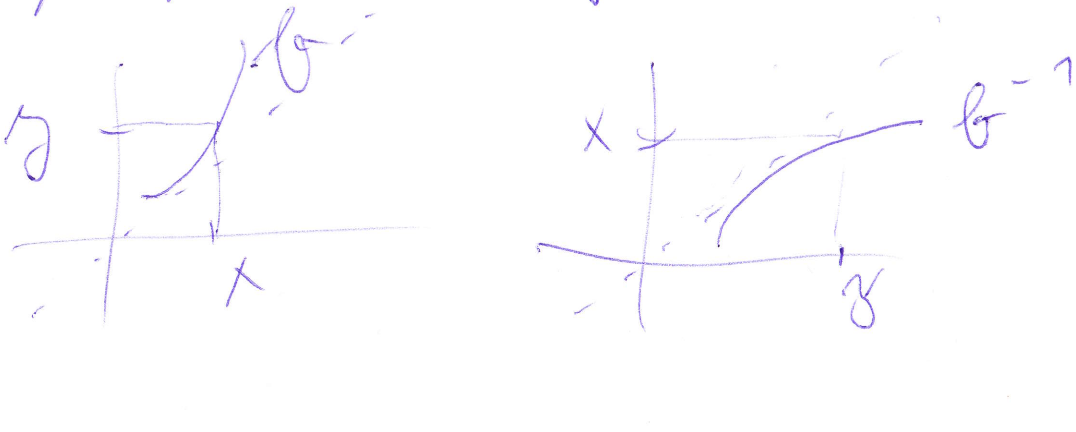
b)



f nenabývá maxima ani minima na $[0,1]$. (ale není spojitá).

Definice Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je prostá na J, jestliže pro všechna $x, y \in J$ platí $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Pro prostou funkci $f: J \to \mathbb{R}$ definujeme funkci $f^{-1}: f(J) \to \mathbb{R}$ předpisem $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$.



Věta T 3.11 (o inverzní funkci)

Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

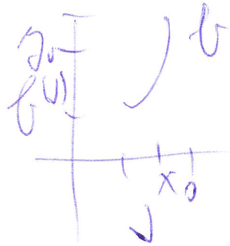
<u>Dk:</u> BÚNO f je spojitá a rostoucí. Víme, že f^{-1} je definováno na $f(J)$

- Dokážu, že f^{-1} je rostoucí: Sporem

  Nechť $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$, ale $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq f^{-1}(y_2) = x_2$.

  Pak ale $x_1 \geq x_2 \xRightarrow{f \text{ rostoucí}} f(x_1) = y_1 \geq f(x_2) = y_2$ ↯.

- $y_0 \in f(J)$ vnitřní bod spojitost:



Víme $f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je vnitřní bod J.

Nechť $\varepsilon > 0$.

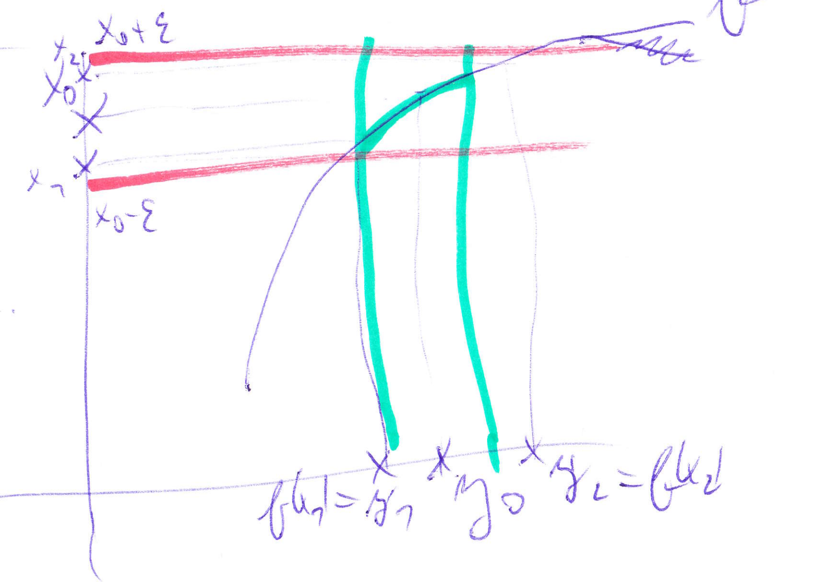
Existují $x_1, x_2 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap J$ a $x_1 < x_0 < x_2$.

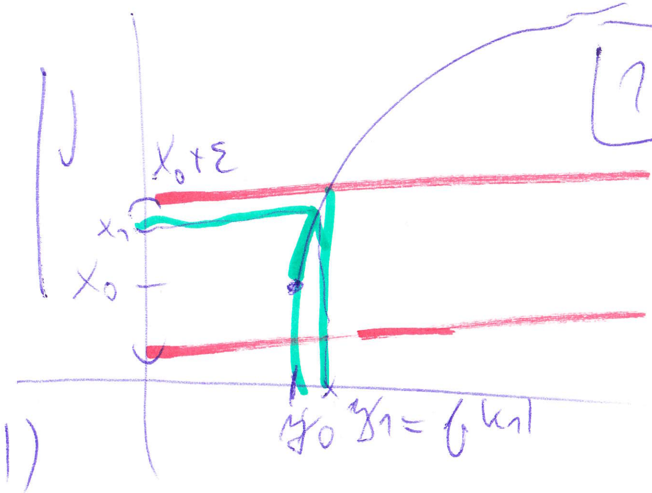
Pak $f(x_1) < \overset{y_0}{\overset{\parallel}{f(x_0)}} < f(x_2)$.

Zvolme $\delta = \min\{f(x_2)-f(x_0), f(x_0)-f(x_1)\}$.

Pak $B(f(x_0),\delta) = B(y_0,\delta) \subset (f(x_1), f(x_2))$.

Nyní $f^{-1}(B(y_0,\delta)) \subset (x_1, x_2) \subset (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \Rightarrow \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$





- $y_0 \in f(J)$ levý krajní bod

$f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je levý krajní bod J.

Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $x_1 \in (x_0, x_0+\varepsilon) \cap J$

Tak, že $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$

Položíme $\delta = f(x_1) - f(x_0)$, pak

$$B_+(y_0,\delta) = [y_0, y_0+\delta) = [\overset{f(x_0)}{\overset{\parallel}{y_0}}, f(x_1))$$

Vzní $f^{-1}(B_+(y_0,\delta)) = [x_0, x_1) \subset (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

$\square$

- y_0 pravý krajní bod analogicky

Příklad: Funkce $x \to x^n$ je spojitá a rostoucí na $[0,\infty)$, a proto je funkce $x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0,\infty)$.

Pro n liché je x^n rostoucí na $\mathbb{R} \Rightarrow$
$\sqrt[n]{x}$ je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$.

3.4. Elementární funkce

14-5

Věta T 3.12 (zavedení exponenciely) Existuje funkce $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

a) $\exp(x)$ je rostoucí na $\mathbb{R}$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

c) $\exp(0) = 1$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

e) $\exp(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

d)

$(e^x)' = e^x$

(A) $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

(B) $\log x = \int_1^x \frac{1}{y}\, dy \implies \exp = (\log)^{-1}$

(C) $e^x = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

b. řada $\implies f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Taylor

vlastnosti exp: • $\exp(n\cdot x) = (\exp x)^n$

• $\exp x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad \exp x = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$

pokud $\exists x \ \exp(x) = 0 \Rightarrow \exp\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \exp\left(\frac{x}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{2^n} \to 0 \overset{\exp \text{ spojitá}}{\Rightarrow} \exp(0) = 0$

spor s $\exp(0) = 1$.

• $\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$

z a) je exp rostoucí $\Rightarrow \lim_{+\infty} \exp x$ existuje.

$\lim_{n \to \infty} \exp(n) = \lim_{n \to \infty} (\exp(1))^n = +\infty \Rightarrow \lim_{+\infty} \exp x = +\infty$.

• $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

$= \lim_{x \to -\infty} \exp(x) \cdot \frac{\exp(-x)}{\exp(-x)} \overset{b)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp(0)}{\exp(-x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

• , spojitá funkce nabývá mezihodnot

$\Rightarrow H(\exp) = (0, +\infty)$