Naleznete extrémy $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na M,

kde $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(y)$

$M = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

- M je uz. protože je průnikem 3 uz. množin
- M je omez. protože je podmnožinou jednotkového kruhu.

$\Rightarrow$ M je kompaktní. f je spojí, i.e. nabývá na M maxima a minima.

$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ kde

$M_0 = \{x^2+y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$

$M_1 = \{x^2+y^2 < 1, x > 0, y = 0\}$

$M_2 = \{x^2+y^2 < 1, x = 0, y > 0\}$

$M_3 = \{x^2+y^2=1,\ x>0,\ y>0\}$

$M_4 = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$

M_0 je ot., $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}\right) \neq 0$ na M_0.

Na M_1, M_2, M_3 použijeme Větu o multiplikátorech.

1) pro M_1 je $g(x,y) = y$, $\nabla g(x,y) = (0,1)$.

Jelikož $\nabla g \neq 0$ na M_1 a $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ na M_1

nedostáváme žádný podezřelý bod.

2) Obdobně na Γ_2 kde $g(x,y) = x$.

3) Pro Γ_3 je $g(x,y) = x^2+y^2$, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$.

$\nabla g \neq 0$ na Γ_3. Z druhé pod. dostáváme systém

$$x^2+y^2 = 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y$$

Z druhé a třetí rovnice víme, že $x \neq 0$. Jejich kombinací dostaneme:

$$x + x^3 = y + y^3.$$

Jelikož $\varphi(t) = t + t^3$ je prostá ($\varphi'(t) = 1 + 3t^2 > 0$) dostáváme $x = y$. Z první rovnice pak $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Máme 4 podezřelé body.

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0,1) = f(1,0) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \geq \operatorname{arctg}(1)$$

neboť arctg je na $(0,\infty)$ rostoucí a dvoudrávní.

Tedy minima f nabývá v bodě $(0,0)$, maxima v bodě $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.