Geometrie

cvičení - projektivní rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{RP}$ a projektivní prostor $\mathbb{P}$

DÚ4 Zopakovat pojmy: ekvivalence, lineární zobrazení, báze, lineární soustava suřadnic, dvojpoměr

1. V $\mathbb{E}^2$ jsou dány body $A = [1, 1], B = [3, 2], C = [3, 0]$ a

   a) $D_1 = [4, 1]$

   b) $D_2 = [5, 1]$.

   Určete pomocí operací skalárního a vektorového součinu v $\mathbb{RP}^2$ průsečík E přímek AB a CD.

DÚ4 Určete všechny polohy tří různých rovin v $\mathbb{E}^3$ a $\mathbb{RP}^3$.

DÚ4 V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (-2, 0, 1), B = (2, 0, 1), C = (1, 1, 1), D = (-1, 1, 1)$. Určete souřadnice průsečíků přímek $P = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}, Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}, R = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ a určete, zda jsou kolineární.

2. V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body A, B a C. Určete podmínku aby byly A, B, C kolineární.

3. Určete nevlastní body přímky $p = (2, 4, 1)$ v $\mathbb{RP}^2$.

4. Určete souřadnice nevlastní přímky v $\mathbb{RP}^2$.

DÚ5 Určete souřadnice nevlastní roviny v $\mathbb{RP}^3$.

DÚ5 Jsou dány body $A = (1, 0, 0, 0), B = (0, 0, 0, 1), C = (0, 1, 0, 1)$ v $\mathbb{RP}^3$. Určete množinu všech bodů, které leží v rovině A, B, C.

DÚ5 Interpretujte přímku jako vektorový součin bodů v přímkovém/vektorovém modelu $\mathbb{RP}^2$ v $\mathbb{E}^3$.

5. V $\mathbb{P}^2$ jsou dány body $A = (3, 2, 0), B = (8, 2, 2)$ určete obecnou rovinici a parametrické vyjádření přímky $\overline{AB}$.

DÚ6 V $\mathbb{P}^3$ je dána přímka p jako průsečnice rovin $\rho : 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_0$ a $\sigma : -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_0$. Určete nevlastní body přímky p.

6. V $\mathbb{P}^3$ je dán projektivní repér (E_1, E_2, E_3, E_0, J). Určete obecné a parametrické vyjádření

   a) roviny ρ procházející body E_0, E_1, J.

   b) přímky $p = \overline{E_3 J}$

7. V $\mathbb{P}^3$ jsou dány body $A = (-3, 5, 15, 1), B = (0, 0, 7, 1), C = (2, -1, 4, 1), D = (4, -3, 0, 1)$, ověřte, že $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ jsou různoběžné a najděte jejich průsečík.

DÚ6 Dokažte v $\mathbb{E}^2$: Nechť jsou dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce p a bod O, který na ní neleží. Označme $\overline{AO} = a$ a podobně b, c, d Pak platí:

$$(AB; CD) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)},$$

kde $\sin(a, c)$ je sinus orientovaného úhlu $\sphericalangle(a, c)$.

DÚ6 Dokažte v $\mathbb{E}^2$: Nechť jsou dány přímky p, p' a bod O, který neleží na žádné z nich. Promítneme-li čtyři různé body A, B, C, D přímky p z bodu O na přímku p' do bodů A', B', C', D', potom platí $(AB; CD) = (A'B'; C'D')$.
Nápověda: lze využít předešlou větu.

8. Je dáno zobrazení f na $\mathbb{P}_1$: $P(1,0) \to P'(1,4)$ $Q(2,3) \to Q'(8,5)$ $R(0,1) \to R'(-2,1)$ Určete matici zobrazení f a jeho samodružné body.

9. V $\mathbb{P}^2$ určete všechny samodružné body a matici kolineace, která zobrazuje body

$$\begin{gathered}(-2,0,1) \to (-2,1,1)\\ (2,0,1) \to (2,1,1)\\ (1,1,1) \to (2,0,1)\\ (-1,1,1) \to (-2,0,1)\end{gathered}$$

Najděte obraz přímky $2x_1 = 0$ v dané kolineaci.

DÚ7 Jsou dány body A, B, C na přímce tak, že dělicí poměr $(AB; C) = -1$. Určete bod D na stejné přímce takový, že dvojpoměr $(AB; CD)$ je

a) 2
b) $-\frac{1}{2}$
c) -1
d) 1

DÚ7 Jsou dány množiny bodů $\mathbf{A}: A[-a, a^2]$ a $\mathbf{B}: B[b, b^2]$ v $\mathbb{R}$ pro $1 < a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Najděte množinu $\mathbf{P}$ průsečíků P spojnic $\overline{AB}$ s osou y. Úlohu řešte dvojmo: v $\mathbb{E}^2$ a taky v rozšíření $\mathbb{RP}^2$.
b) Zamyslete (!) se nad y-ovými souřadnicemi bodů P a napište jakou číselnou množinu popisují.

10. Určete dvojpoměr $(AB; CD)$ pro $A = (1,-1,0,1), B = (4,-4,0,1), C = (3,-3,0,1), D = (7,-7,0,1)$ v $\mathbb{P}^3$.

11. V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (-2,0,1), B = (2,0,1), C = (1,1,1), D = (-1,1,1)$.

a) Určete souřadnice průsečíků P a Q přímek $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ a $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AD}$.
b) Spojnice $\overleftrightarrow{PQ}$ protne $\overleftrightarrow{AB}$ v bodě X a bod Y je nevlastním bodem přímky $\overleftrightarrow{AB}$. Určete dvojpoměr $(AB; XY)$.

DÚ 9 V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (-2,0,1), B = (1,0,1), C = (3,1,1), D = (0,1,1)$.

a) Určete souřadnice přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{CD}$ a určete průsečík E přímek $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$.
b) Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ určete bod F takový, že dvojpoměr $(AB; EF) = 4$.

DÚ8/9 V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (-2,-3,1), B = (3,0,1), C = (0,3,1), D = (1,0,3)$.

a) Určete průsečíky $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}, Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{DA}$ a $R = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$ a ověřte, zda jsou P, Q a R kolineární.
b) Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ najděte bod W takový, že $(A, B; P, W) = -1$.
c) Určete všechny samodružné body a matici kolineace, která zobrazuje body

$$\begin{gathered}A(-2,-3,1) \to A'(6,5,1)\\ D(1,0,3) \to D'(9,8,3)\\ \text{body } B = (3,0,1) \text{ a } C = (0,3,1) \text{ jsou samodružné}\end{gathered}$$

d) V dané kolineaci najděte vzor nevlastního bodu přímky $\overleftrightarrow{BC}$.

do 14.12. V prostoru je dána krychle $ABCDEFGH$ a její stín $A'B'C'D'E'F'G'H'$ v rovině ρ při středovém osvětlení z bodu S (viz obrázek + soubor `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/geometrie/du_2_pr3.ggb`). Souřadnice bodů krychle v $\mathbb{RP}^3$ jsou:

$A = (6,0,0,1)$ $\quad$ $C = (2,4,0,1)$ $\quad$ $E = (6,0,4,1)$ $\quad$ $G = (2,4,4,1)$

$B = (6,4,0,1)$ $\quad$ $D = (2,0,0,1)$ $\quad$ $F = (6,4,4,1)$ $\quad$ $H = (2,0,4,1)$

Souřadnice bodů stínu v $\mathbb{RP}^2$ jsou:

$A = (-12,-12,1)$ $\quad$ $C = (4,-4/3,1)$ $\quad$ $E = (-12,4,1)$ $\quad$ $G = (4,4,1)$

$B = (4,-12,1)$ $\quad$ $D = (-4/3,-4/3,1)$ $\quad$ $F = (4,4,1)$ $\quad$ $H = (-4/3,4,1)$

Určete matici kolineárního zobrazení mezi body krychle a body jejího stínu.